

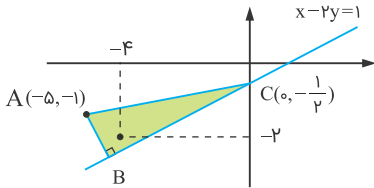


واسه دریافت سگفتانه پزن رولوگو 😊

گزینه ۲

۱

باتوجه به توضیحات سؤال و باتوجه به اینکه نقطه $(-4, -2)$ درون مثلث قرار دارد، شکل مطلوب، به صورت زیر است. همچنین پاره خط عمود از نقطه A بر خط $x - 2y = 1$ یکی از اضلاع مثلث است.



معادله ارتفاع AB را می نویسیم:

$$AB : y + 1 = -2(x + 5) \Rightarrow y = -2x - 11$$

$$AC = \sqrt{(0 + 5)^2 + (-\frac{1}{2} + 1)^2} = \sqrt{25 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{101}}{2}$$

$$AB = \frac{|-5 + 2 - 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$BC = \sqrt{\frac{101}{4} - \frac{16}{5}} = \frac{21}{2\sqrt{5}}$$

$$S = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{21}{2\sqrt{5}} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر $a + b + c = 0$ ، آنگاه $x = 1$ و $x = \frac{c}{a}$ است. مجموع ضرایب در معادله درجه دوم داده شده برابر صفر است، پس:

$$2x^2 - (m+2)x + m = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{m}{2}$$

$x = 0 : y = m$ تقاطع با محور عرض ها

$$\Rightarrow S = \left| \frac{m(\frac{m}{2} - 1)}{2} \right| = \frac{3}{4} \Rightarrow |m(m-2)| = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases} \\ m^2 - 2m + 3 = 0 \text{ ریشه ندارد} \end{cases}$$

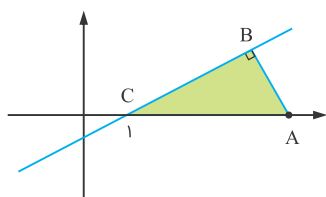
به ازای $m = -1, 3$ تابع $y = 2x^2 - (m+2)x + m$ دو ریشه دارد، بنابراین هر دو مقدار قابل قبول است. حال داریم:

$$y = x^2 - mx + 1 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 : y = x^2 + x + 1 \Rightarrow x_S = \frac{-1}{2} \\ m = 3 : y = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow x_S = \frac{3}{2} \end{cases}$$

در گزینه ها فقط $x = \frac{-1}{2}$ موجود است، پس گزینه "۴" درست است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

اطلاعات مسئله، نشان می دهد که مثلث ABC ، قائم الزاویه است.



$$AB = \frac{|4 - 0 - 1|}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan \hat{C} = m_{BC} = \frac{1}{3}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow BC = \frac{9}{\sqrt{10}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{\sqrt{10}} \times \frac{9}{\sqrt{10}} = \frac{13/5}{10} = 1/35$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳



ورود به دنیای ماویک

اگر $a < 0$ و عرض رأس سهمی $-\frac{1}{p}$ باشد، داریم:

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{p} \Rightarrow \Delta = 4a \Rightarrow 1 - \lambda a^2 = 4a$$

$$\Rightarrow \lambda a^2 + 4a - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{p} \\ a = \frac{1}{4} \end{cases}$$

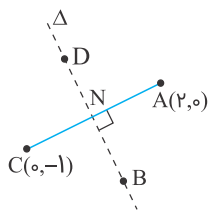
باتوجه به علامت $a = -\frac{1}{p}$ ، a قابل قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{p}{\lambda} \Rightarrow -\frac{9 - 4a^2}{a} = \frac{p}{2} \Rightarrow -1\lambda + \lambda a^2 = 4a$$

$$\Rightarrow \lambda a^2 - 4a - 1\lambda = 0 \Rightarrow a = \frac{4 \pm 25}{16} \xrightarrow{a > 0} a = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳



معادله عمودمنصف پاره خط AC را می نویسیم.

$$N = \frac{A + C}{2} = (1, -\frac{1}{2})$$

$$m_{AC} = \frac{0 + 1}{2 - 0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta : y + \frac{1}{2} = -2(x - 1)$$

$$\Rightarrow \Delta : y = \frac{3}{2} - 2x$$

رئوس B و D از مربع موردنظر روی خط Δ قرار دارد. بنابراین B را به صورت $B(x, \frac{3}{2} - 2x)$ در نظر می گیریم.

$$AB \perp BC \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{2} - 2x}{x - 2} \times \frac{\frac{5}{2} - 2x}{x - 0} = -1 \Rightarrow (2x - \frac{3}{2})(2x - \frac{5}{2}) = 2x - x^2$$

$$\Rightarrow (2x)^2 - 4(2x) + \frac{15}{4} = 2x - x^2$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 10x + \frac{15}{4} = 0 \xrightarrow{\div 5} x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = 1 \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

باتوجه به گزینه ها طول نقطه مطلوب $\frac{3}{2}$ است.

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2} \Rightarrow B(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{\beta}{25\alpha} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{5}$$

α ریشه معادله است و دو حالت رخ می‌دهد:

$$\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow 25 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{25} + \frac{4}{5} + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -1 < \alpha \quad \times$$

$$\alpha = -\frac{1}{5} \Rightarrow 25 \times \frac{-1}{5} \times \frac{1}{25} - \frac{4}{5} + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 1 > \alpha \quad \checkmark$$

بنابراین $\alpha = -\frac{1}{5}$ و $\beta = 1$ قابل قبول است.

$$y = -5x^2 + 4x + 1$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{5}, \quad y_S = -5\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{5}\right) + 1 = \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow S\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

بنابراین S در ناحیه اول قرار دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

$$x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = 1 \\ P = x_1 x_2 = -4 \end{cases}$$

ریشه‌های معادله جدید را α و β می‌نامیم. داریم:

$$\begin{aligned} S_{\text{new}} &= \alpha + \beta = \left(x_2^3 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_1^3 + \frac{1}{x_2}\right) = x_1^3 + x_2^3 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \\ &= S^3 - 3SP + \frac{S}{P} = 1 - 3(-4) - \frac{1}{-4} = 13 - \frac{1}{-4} = \frac{51}{4} \\ P_{\text{new}} &= \left(x_2^3 + \frac{1}{x_1}\right)\left(x_1^3 + \frac{1}{x_2}\right) = (x_1 x_2)^3 + x_2^2 + x_1^2 + \frac{1}{x_1 x_2} \\ &= P^3 + S^2 - 2P + \frac{1}{P} = (-4)^3 + (1)^2 - 2(-4) + \frac{1}{-4} \\ &= -64 + 1 + 8 - \frac{1}{4} = -55 - \frac{1}{4} = \frac{-221}{4} \end{aligned}$$

با S_{new} و P_{new} به دست آمده معادله جدید را می‌سازیم:

$$x^2 - S_{\text{new}}x + P_{\text{new}} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{51}{4}x - \frac{221}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 = 51x + 221$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$AB \parallel CD : \frac{4-1}{-1-3} = \frac{y-y-3}{x+1+x} = \frac{-3}{2x+1} \Rightarrow -\frac{3}{4} = \frac{-3}{2x+1}$$

$$\Rightarrow 2x+1=4 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$AB \perp BC : \frac{-3}{4} \times \frac{y-1}{\frac{3}{2}-3} = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}(y-1) = -1 \Rightarrow y = -1$$

$$C(\frac{3}{2}, -1) \Rightarrow |AB| = 5, |BC| = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{محیط} = 2(|AB| + |BC|) = 15$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 = -5 \end{cases}$$

ابتدا معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن $x_1 + 1$ و $x_2 + 1$ باشد برای این منظور کافی است از x ها یک واحد کم کنیم:

$$(x-1)^2 + (x-1) - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 5 = 0$$

اگر ریشه‌ها α و β باشد:

$$(\alpha + \beta) = 1, \quad \alpha\beta = -5$$

حال معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha^3}$ و $\frac{1}{\beta^3}$ باشد:

$$S_{\text{New}} = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{(\alpha\beta)^3} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3(\alpha + \beta)(\alpha\beta)}{(\alpha\beta)^3}$$

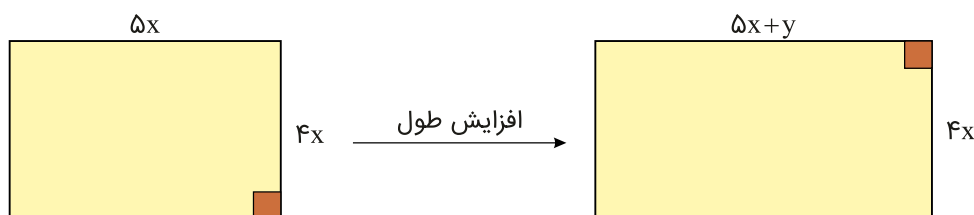
$$= \frac{(1)^3 - 3(1)(-5)}{-125} = -\frac{16}{125}$$

$$P_{\text{New}} = \frac{1}{\alpha^3} \times \frac{1}{\beta^3} = \frac{1}{(\alpha\beta)^3} = -\frac{1}{125}$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(-\frac{16}{125}\right)x - \frac{1}{125} \Rightarrow 125x^2 + 16x - 1 = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

عدد طلایی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.



$$\frac{5x+y}{4x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 5x+y = 2x(1+\sqrt{5})$$

پس طول مستطیل طلایی را می‌توان $2x(1+\sqrt{5})$ در نظر گرفت:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{(4x)(2x(1+\sqrt{5}))}{(4x)(5x)} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{5} = 0.4(1+\sqrt{5})$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$AB \parallel CD : m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow \frac{y-y+3}{x+1+x} = \frac{0+3}{-4-0}$$

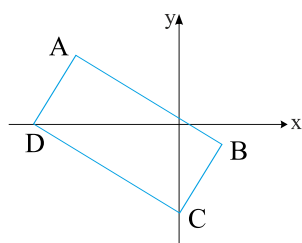
$$\Rightarrow 2x+1 = -4 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

$$AD \perp DC : m_{AD} \times m_{DC} = -1 \Rightarrow \frac{y}{x+4} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -1 \Rightarrow y = 2$$

$$x = -\frac{5}{2}, y = 2 \Rightarrow A\left(-\frac{5}{2}, 2\right), B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$$

$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, BC = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = (AB)(BC) = (5)\left(\frac{5}{2}\right) = 12.5$$



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + c = b$ ، آنگاه $x = -1$ و $x = -\frac{c}{a}$ است.

$$y = mx^2 - 4x - (m + 4) \Rightarrow x = -1, x = \frac{m + 4}{m}$$

$$f(0) = -(m + 4)$$

$$\left| \frac{m + 4}{m} - (-1) \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|m|} = \frac{\sqrt{16 + 4m^2 + 16m}}{|m|} = \frac{2|m + 2|}{|m|}$$

$$S = \frac{\left| \frac{m + 4}{m} - (-1) \right| \times |-(m + 4)|}{2} = \frac{\left| \frac{2(m + 2)}{m} \times (m + 4) \right|}{2} = 3$$

$$\Rightarrow m^2 + 6m + 8 = 3|m|$$

m باید کوچکتر از صفر باشد، زیرا برای m های مثبت، معادله فوق جواب ندارد. پس داریم:

$$\xrightarrow{m < 0} m^2 + 9m + 8 = -3m \Rightarrow m^2 + 9m + 8 = 0 \Rightarrow m = -1, m = -8$$

$$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2m} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \Rightarrow x_{\text{رأس}} = -2 \\ m = -8 \Rightarrow x_{\text{رأس}} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \left| -2 + \frac{1}{4} \right| = \frac{7}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

به $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ عدد طلایی می‌گوییم. در مستطیل به طول و عرض a و b ، قطر برابر $\sqrt{a^2 + b^2}$ است.

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{4}{2 + 2\sqrt{5}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر مجموع ضرایب صفر باشد، یکی از ریشه‌ها $x = 1$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است:

$$x^2 - (a+1)x + a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = a \end{cases} \Rightarrow a = 3$$

$$x^2 - (3a+1)x + b = 0 \xrightarrow{a=3} x^2 - 10x + b = 0$$

مجموع ریشه‌های معادله داده شده برابر $10 = -\frac{-10}{1}$ است و ریشه‌ها باید دو عدد زوج متوالی باشند، پس: $x = 4$ و $x = 6$

$$|(1 \times 3) - (4 \times 6)| = 21$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

نکته: فاصله دو خط موازی با معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$y - ax = 1 \Rightarrow y = ax + 1$$

$$ay - x = a - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{a}x - \frac{1}{a} + 1$$

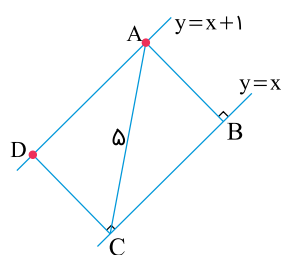
دو ضلع مقابل مستطیل موازی‌اند، بنابراین شیب آن‌ها برابر است.

$$\frac{1}{a} = a \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$a = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ y = x \end{cases}$$

$$a = -1 \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$a = -1$ قابل قبول نیست، زیرا نقطه $A(1, 2)$ در هیچ کدام از دو ضلع مقابل صدق نمی‌کند. فاصله دو خط موازی $y = x + 1$ و $y = x$ برابر عرض مستطیل است.



$$|AB| = \frac{|1 - 0|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |BC| = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1/2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

در سمت چپ مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\frac{2\sqrt{2-x}}{-x-2} = \frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$$

با طرفین وسطین داریم:

$$10(2-x) = (2-x)(-x-2)$$

$2-x$ را خط می‌زنیم و جواب $x=2$ حاصل می‌شود، اما چون ریشهٔ مخرج معادلهٔ اولیه است آن را نمی‌پذیریم.

$$-x-2=10 \Rightarrow x=-12$$

هیچ جواب مثبتی در کار نیست.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

دامنهٔ معادله فقط $x=2$ است، بنابراین جواب معادله یا $x=2$ است و یا اینکه جواب حقیقی ندارد. $x=2$ را امتحان می‌کنیم:

$$x=2 \Rightarrow \sqrt{4-3} = \sqrt{2+0} - \sqrt{2-2} \Rightarrow 1 = \sqrt{2}$$

پس $x=2$ جواب معادله نیست و در نتیجه معادله جواب حقیقی ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

برای y های مثبت داریم $y=2\sqrt{x}$ و نقاط روی آن را $N(x, 2\sqrt{x})$ در نظر می‌گیریم:

$$MN = \sqrt{(x-3)^2 + (2\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 9}$$

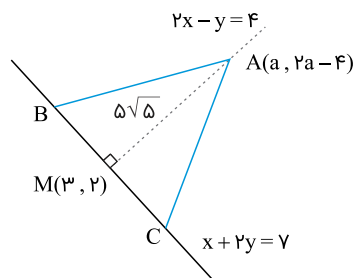
$$\min(MN) = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}} = \sqrt{-\frac{4-36}{4}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

معادله خط عمود بر BC و گذرا از M را می‌نویسیم:

$$m_{AM} = \frac{-1}{m_{BC}} = 2$$

$$AM : y - 2 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 4$$



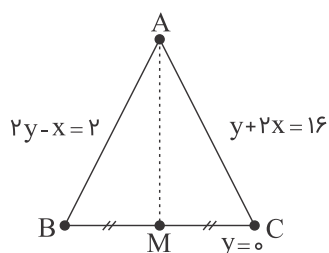
$$|AM| = 5\sqrt{5} \Rightarrow AM^2 = 125$$

$$(a - 3)^2 + (2a - 6)^2 = 125 \Rightarrow 5(a - 3)^2 = 125$$

$$(a - 3)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ a = -2 \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

مثلث را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:



باید فاصله نقطه A از نقطه M را به دست آوریم:
از تقاطع دو خط $y + 2x = 16$ و $2y - x = 2$ مختصات نقطه A به دست می‌آید.

$$2 \times \begin{cases} 2y - x = 2 \\ y + 2x = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - 2x = 4 \\ y + 2x = 16 \end{cases} \Rightarrow y = 4, x = 6 \Rightarrow A(6, 4)$$

برای به دست آوردن مختصات نقطه M، ابتدا مختصات نقاط B و C را محاسبه می‌کنیم.

$$2y - x = 2 \xrightarrow{y=0} x = -2 \Rightarrow B(-2, 0)$$

$$y + 2x = 16 \xrightarrow{y=0} x = 8 \Rightarrow C(8, 0)$$

سپس مختصات نقطه M را حساب می‌کنیم:

$$M\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) \Rightarrow M(3, 0)$$

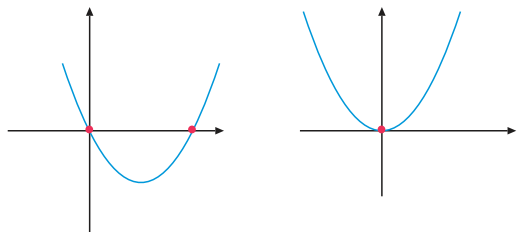
اکنون فاصله دو نقطه M و A را محاسبه می‌کنیم:

$$AM = \sqrt{(3 - 6)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$y = ax^2 + (3 + 2a)x = x(ax + 3 + 2a) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + 3 + 2a = 0 \Rightarrow x = -\frac{3 + 2a}{a} \end{cases}$$

سهمی از ناحیه سوم عبور نمی‌کند، بنابراین به صورت شکل‌های زیر می‌تواند باشد:



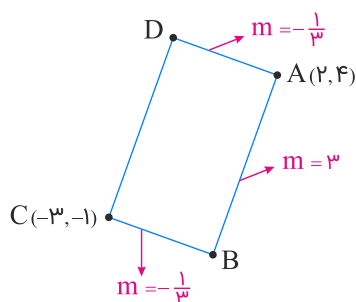
$$a > 0 \Rightarrow \text{سهمی روبه بالا} (*)$$

$$0 < \text{ریشه غیر صفر} \Rightarrow -\frac{3 + 2a}{a} > 0 \Rightarrow \frac{3 + 2a}{a} < 0$$

$$\xrightarrow{a > 0} 3 + 2a < 0 \Rightarrow a < -\frac{3}{2}$$

بنابراین طبق (*) برای a مقداری یافت نشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱



نقطه B روی خط $y - 4 = 3(x - 2)$ قرار دارد: $B(a, 3a - 2)$
از طرفی شیب BC برابر $-\frac{1}{3}$ است:

$$\frac{3a - 2 + 1}{a + 3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow 9a - 3 = -a - 3 \Rightarrow a = 0$$

$$B(0, -2)$$

$$AB = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$$

$$BC = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$\text{محیط} : 2\sqrt{40} + 2\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم، حال داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{a}{3} \xrightarrow{\beta=3\alpha} \alpha + 3\alpha = \frac{a}{3} \Rightarrow 4\alpha = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 12\alpha$$

$$\alpha.\beta = \frac{4}{3} \xrightarrow{\beta=3\alpha} \alpha.3\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{2}{3}$$

$$a = 12\alpha = 12\left(\pm \frac{2}{3}\right) = \pm 8 \Rightarrow 8 - (-8) = 16$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

$$\begin{cases} AB : y + 2x = 7 \\ BC : 2y - 7x = -19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 4x = 14 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} x = 3, y = 1$$

$$\Rightarrow B(3, 1)$$

$$BH = AC \text{ از } B \text{ فاصله} = \frac{|4(1) - 3(3) - 17|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

خط گذرنده از C و B را می‌یابیم:

$$B(3, 3), C(7, 11)$$

$$m = \frac{11 - 3}{7 - 3} = 2$$

$$y = 2x - 3 \Rightarrow y - 2x + 3 = 0$$

فاصله A تا این خط را می‌یابیم:

$$AH = \frac{|9 - 2 + 3|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

$$S = \frac{-(-(a^2 + b^2 - 12))}{1} \Rightarrow a + b = a^2 + b^2 - 12$$

$$a + b = (a + b)^2 - 2ab - 12 \quad (I)$$

$$P : \frac{a + b - 1}{1} \Rightarrow ab = (a + b) - 1 \text{ از طرفی}$$

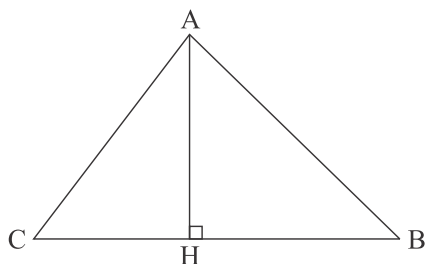
$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطه (I)}} a + b = (a + b)^2 - 2(a + b) + 2 - 12$$

$$\Rightarrow (a + b)^2 - 3(a + b) - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = \frac{3 + \sqrt{49}}{2} \Rightarrow a + b = 5 \\ a + b = \frac{3 - \sqrt{49}}{2} \Rightarrow a + b = -2 \end{cases} \quad \checkmark \text{ قابل قبول}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

برای به دست آوردن ارتفاع AH در مثلث ABC، کافی است که فاصله رأس A از خط BC را محاسبه کنیم.



ابتدا معادله خط BC را به دست می‌آوریم:

$$B(7, 3), C(2, -2) \Rightarrow m = \frac{3 + 2}{7 - 2} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 2 = x - 2 \Rightarrow x - y - 4 = 0$$

بنابراین فاصله نقطه A(1, 5) از خط BC برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - 5 - 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

در مسیر رفت و برگشت، به خاطر حرکت آب رودخانه به اندازه سرعت آب (v) از سرعت قایق کم و به آن اضافه می‌شود، پس زمان رفت $\frac{1200}{100 + v}$ و زمان برگشت $\frac{1200}{100 - v}$ است و اختلاف آن‌ها باید ۵ باشد.

$$\frac{1200}{100 - v} - \frac{1200}{100 + v} = 5 \xrightarrow{\div 5} 240 \left(\frac{1}{100 - v} - \frac{1}{100 + v} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{240 \times 2v}{(100 - v)(100 + v)} = 1 \Rightarrow 100^2 - v^2 = 480v$$

$$\Rightarrow v^2 + 480v - 10000 = 0 \Rightarrow (v - 20)(v + 500) = 0 \xrightarrow{v > 0} v = 20$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

فرض کنید سرعت پرواز پرونده v باشد. در این صورت سرعت رفت $v + \omega$ و سرعت برگشت $v - \omega$ خواهد بود و داریم:

$$t_1 = \frac{x_1}{v_1} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{\omega + v}$$

$$t_2 = \frac{x_2}{v_2} \Rightarrow t_2 = \frac{1}{v - \omega}$$

$$t_1 + t_2 = 9 \text{ (min)} = \frac{9}{60} \text{ (h)} \Rightarrow \frac{9}{60} = \frac{1}{\omega + v} + \frac{1}{v - \omega}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{1}{\omega + v} + \frac{1}{v - \omega} \xrightarrow{\times 20(v^2 - \omega^2)} 3(v^2 - \omega^2) = 20(v - \omega) + 20(v + \omega)$$

$$\Rightarrow 3v^2 - 7\omega = 20v - 100 + 20v + 100$$

$$\Rightarrow 3v^2 - 40v - 7\omega = 0 \Rightarrow (3v + \omega)(v - 15) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = 15 & \checkmark \\ v = -\frac{\omega}{3} & \times \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$\left| -\frac{b}{a} - \left(-\frac{c}{a}\right) \right| = 2 \Rightarrow \left| -\frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right| = 2 \Rightarrow |c - b| = 2a \Rightarrow \begin{cases} c - b = 2a \\ \text{یا} \\ c - b = -2a \Rightarrow b - c = 2a \end{cases}$$

ابتدا حالتی که $c - b = 2a$ باشد را بررسی می‌کنیم، حالت دوم نیز مشابه است.

چون a یک رقم طبیعی است پس $2a$ زوج و مثبت است. حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

(۱) اگر $c - b = 2$ باشد، آنگاه برای c مقادیر $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ وجود دارد. (حالت ۷)

(۲) اگر $c - b = 4$ باشد، آنگاه برای c مقادیر $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ وجود دارد. (حالت ۵)

(۳) اگر $c - b = 6$ باشد، آنگاه برای c مقادیر $\{7, 8, 9\}$ وجود دارد. (حالت ۳)

(۴) اگر $c - b = 8$ باشد، آنگاه برای c مقادیر $\{9\}$ وجود دارد. (حالت ۱)

بنابراین کل حالت‌ها برابر است با:

$$2(1 + 3 + 5 + 7) = 2 \times 16 = 32$$

تذکر: باتوجه به اینکه به ازای $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ دلتا همواره مثبت است، بنابراین کل حالات به دست آمده قابل قبول می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3} \Rightarrow x^2 = y+3 + y-3 - 2\sqrt{y^2-9}$$

$$\xrightarrow{2y=x^2} \sqrt{y^2-9} = 0 \xrightarrow{y \geq 3} y = 3 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

نقطه تلاقی $A(\sqrt{6}, 3)$ است:

$$|AO| = \sqrt{6+9} = \sqrt{15}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

$$-\frac{b}{a} = -\frac{c}{a} + 2 \Rightarrow b = c - 2a \Rightarrow 2a = c - b$$

$$2 \leq 2a \leq 18 \Rightarrow 2 \leq c - b \leq 18$$

چون $c - b$ برابر با $2a$ است، پس عددی زوج است:

اگر $c - b = 2$ باشد، ۷ حالت وجود دارد

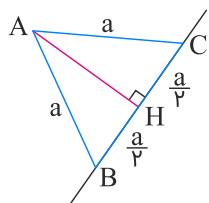
اگر $c - b = 4$ باشد، ۵ حالت وجود دارد.

اگر $c - b = 6$ باشد، ۳ حالت وجود دارد.

اگر $c - b = 8$ باشد، ۱ حالت وجود دارد.

پس در کل ۱۶ حالت داریم.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰



$$\text{محیط} = 3a = \sqrt{12\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2}$$

$$AH : y - 1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{-x}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$A(b, -\frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{3}}), \quad H(2, 1)$$

$$|AH| = \sqrt{(b-2)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{9}}|b-2| = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\Rightarrow |b-2| = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \begin{cases} b-2 = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow b = \frac{13}{\sqrt{10}} \\ b-2 = -\frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow b = \frac{-5}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{13}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right), \quad A\left(\frac{-5}{\sqrt{10}}, \frac{5}{\sqrt{10}}\right)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 \right) \left(\sqrt[3]{x^2} - 1 \right) = 2\sqrt[3]{x} \\ & \left(\frac{\sqrt[3]{x^6} + \sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) \left(\sqrt[3]{x^2} - 1 \right) = 2\sqrt[3]{x} \\ & \xrightarrow{\times \sqrt[3]{x^2}} \left(\underbrace{\sqrt[3]{x^6}}_{a^3} + \underbrace{\sqrt[3]{x^2}}_{ab} + \underbrace{1}_{b^3} \right) \left(\underbrace{\sqrt[3]{x^2}}_a - \underbrace{1}_b \right) = 2x \\ & \Rightarrow x^2 - 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \end{aligned}$$

جمع ریشه‌ها برابر $\frac{-b}{a}$ است: $\frac{-b}{a} = 2$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

معادله خط موردنظر $y = x - 1$ است، این خط را با سهمی قطع می‌دهیم:

$$-x^2 + 2x + 1 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

پس نقاط برخورد $A(-1, -2)$ و $B(2, 1)$ است، وسط AB را حساب می‌کنیم:

$$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

راس سهمی هم $S(1, 2)$ است:

$$|SM| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{26}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

برای اینکه معادله درجه دوم دارای دو ریشه مثبت باشد باید $\Delta > 0$ ، $p > 0$ و $s > 0$ باشد، بنابراین داریم:

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 4 \times 2 \times (m + 6) = m^2 - 8m - 48 > 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(m - 12)(m + 4)}_p > 0$$

x	$-\infty$	-۴	۱۲	$+\infty$
p(x)	$\begin{matrix} + \\ \text{ع} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \\ - \end{matrix}$	$\begin{matrix} \\ + \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ \text{ع} \end{matrix}$

$$\Rightarrow m < -4 \text{ یا } m > 12$$

$$۲) p > 0 \Rightarrow p = -\frac{b}{a} = \frac{-m}{2} > 0 \Rightarrow m < 0$$

$$۳) s > 0 \Rightarrow s = \frac{c}{a} = \frac{m+6}{2} > 0 \Rightarrow m > -6$$

حال از حدود m در (۱)، (۲) و (۳) اشتراک می‌گیریم، در نتیجه داریم:

$$m \in (-6, -4)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، آنگاه داریم:

$$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad p = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است، پس داریم:

$$s = \frac{1}{p} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow -\frac{2m-1}{3} = \frac{1}{\frac{(2-m)}{3}} \Rightarrow \frac{-2m+1}{3} = \frac{3}{2-m}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -2m + 2m^2 + 2 - m = 9 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{c}{a} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

طبق صورت مسئله، معادله داده شده دارای دو ریشه حقیقی است، پس باید $\Delta > 0$ باشد. حال مقدار m را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} m = -1 \Rightarrow 3x^2 + (-2-1)x + 2 + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ غ ق ق} \\ m = \frac{7}{2} \Rightarrow 3x^2 + (2 \times \frac{7}{2} - 1)x + 2 - \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \text{ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین $m = \frac{7}{2}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

$$3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a$$

$$\begin{cases} 2 - 3a \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{2}{3} \\ 2a^2 + 4a \geq 0 \Rightarrow 2a(a+2) \geq 0 \Rightarrow a \in [0, +\infty) \cup (-\infty, -2] \end{cases} \xrightarrow{\cap} (-\infty, -2] \cup [0, \frac{2}{3}]$$

$$\sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \xrightarrow{\text{توان}} 2a^2 + 4a = 4 - 12a + 9a^2 \Rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0$$

$$\Delta = 16^2 - 4 \times 7 \times 4 = 16(16 - 7) = 16 \times 9$$

$$a = \frac{16 \pm 12}{14} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{16 + 12}{14} = 2 \\ a_2 = \frac{16 - 12}{14} = \frac{2}{7} \end{cases}$$

بنابراین $a = \frac{2}{7}$ قابل قبول است.

$$\frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{7} + 1}{\frac{2}{7}} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

$$\sqrt{3a + 16} = 1 - 2a \xrightarrow{\text{توان}} 3a + 16 = 1 - 4a + 4a^2$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 7a - 15 = 0 \Rightarrow (4a + 5)(a - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

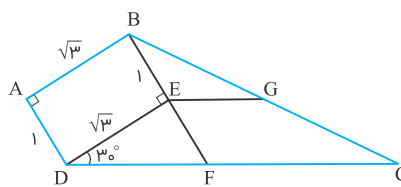
همچنین داریم:

$$\begin{cases} 1 - 2a \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{1}{2} \\ 3a + 16 \geq 0 \Rightarrow a \geq -\frac{16}{3} \end{cases} \xrightarrow{\cap} a \in [-\frac{16}{3}, \frac{1}{2}]$$

پس $a = 3$ در معادله اولیه صدق نمی‌کند، بنابراین $a = -\frac{5}{4}$ است.

$$4a + 9 = 4(-\frac{5}{4}) + 9 = -5 + 9 = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸



$$\triangle EFD : \tan 30^\circ = \frac{EF}{DE} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{EF}{\sqrt{3}} \Rightarrow EF = 1$$

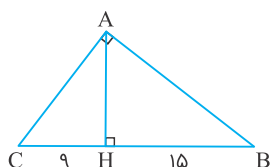
در مثلث BFC، نقاط E و G، به ترتیب وسط اضلاع BF و BC است. بنابراین:

$$FC = 2EG = 2 \times 1/2 = 1$$

$$\triangle DEF : DF^2 = \sqrt{3}^2 + 1^2 = 4 \Rightarrow DF = 2$$

$$DC = DF + FC = 2 + 1 = 3$$

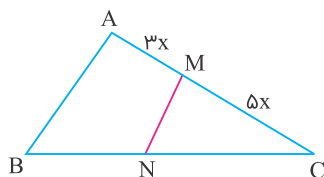
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳



طبق روابط طولی در مثلث قائم الزاویه داریم:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH \times BC}{CH \times BC} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{15 \times 24}{9 \times 24} = \frac{15}{9} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳



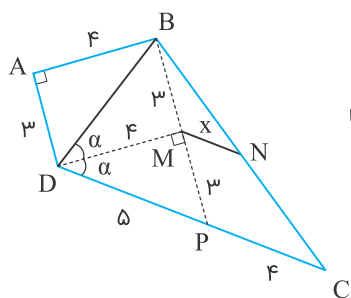
$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \times (BN + NC) \times \lambda x \times \sin \hat{C}}{\frac{1}{2} \times CN \times 5x \times \sin \hat{C}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{BN + NC}{CN} = \frac{5 \times 2}{\lambda} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{BN}{CN} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{CN} = 1/4$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

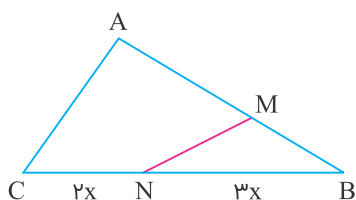
در مثلث BDP زاویه M قائمه است. از طرفی DM نیمساز زاویه BDP می‌باشد. بنابراین دو مثلث BDM و DMP هم‌نهشت هستند. در نتیجه $BD = DP = ۵$ و $PC = ۴$ است و M وسط BP قرار دارد.



حال باتوجه به اینکه N نیز وسط BC قرار دارد، $MN \parallel PC$ است. بنابراین در مثلث BPC، تعمیم قضیه تالس را اعمال می‌کنیم.

$$\frac{x}{4} = \frac{3}{6} \Rightarrow x = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳



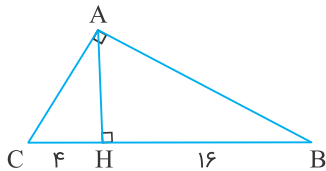
$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNB}} = 3 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} AB \times 5x \times \sin B}{\frac{1}{2} MB \times (3x) \times \sin B} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{AM + MB}{MB} = \frac{9}{5} \Rightarrow \frac{AM}{MB} + 1 = \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{MB}{AM} = 1/25$$

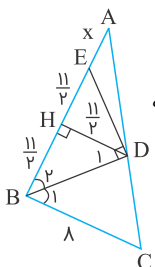
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳



طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH \times BC}{CH \times BC} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{16 \times 20}{4 \times 20} = 4 \Rightarrow \frac{AB}{AC} = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

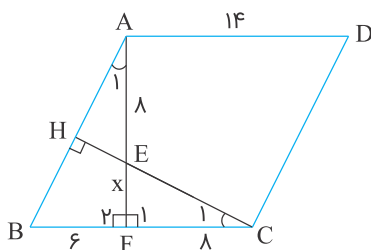


عمود DH را رسم می‌کنیم. چون $DH \parallel BC$ و همچنین BD نیمساز زاویه B است بنابراین $\hat{B} = 90^\circ$ و در نتیجه $DH = BH = EH = \frac{11}{2}$ پس DH ارتفاع و میانه وارد بر وتر است و در نتیجه $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 45^\circ$ اکنون قضیه تالس را در مثلث ABC اعمال می‌کنیم.

$$\frac{\frac{11}{2}}{11} = \frac{x + \frac{11}{2}}{x + 11} \Rightarrow \frac{11}{11} = \frac{2x + 11}{x + 11} \Rightarrow 11x + 121 = 16x + 118$$

$$\Rightarrow 5x = 33 \Rightarrow x = 6\frac{3}{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳



دو زاویه C_1 و A_1 باهم برابرند. تشابه دو مثلث EFC و ABF را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{A}_1 \\ \hat{F}_1 = \hat{F}_2 = 90^\circ \Rightarrow \triangle EFC \sim \triangle ABF \\ \hat{E} = \hat{B} \end{cases}$$

نسبت تشابه عبارتند از:

$$\frac{CF}{AF} = \frac{EF}{BF} \Rightarrow \frac{8}{x + 8} = \frac{x}{6} \Rightarrow x^2 + 8x = 48$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x - 48 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 12) = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$AF = x + 8 = 12$$

راه اول:

مثلث‌های FDC و CEB متشابه هستند:

$$\frac{x}{EC} = \frac{3}{6} \Rightarrow EC = 2x$$

مثلث‌های JDF و JEC متشابه هستند:

$$\frac{2x}{x} = \frac{4}{JF} \Rightarrow JF = 2$$

مثلث‌های CJF و BEF متشابه هستند:

$$\frac{CJ}{9} = \frac{3}{9} \Rightarrow CJ = 3$$

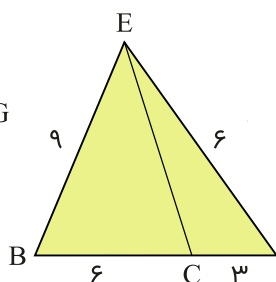
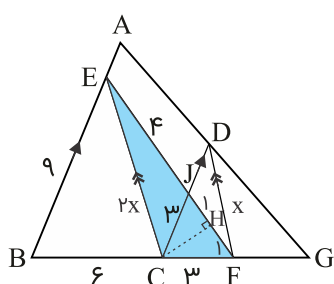
بنابراین مثلث CJF متساوی‌الساقین است و CH ارتفاع وارد بر IF می‌باشد. بنابراین $JH = 1$ و در نتیجه:

$$CH = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه ECH داریم:

$$(2x)^2 = 2^2 + 8 \Rightarrow x^2 = \frac{33}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

راه دوم:



$$\triangle BCE \sim \triangle CFD, \quad k = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow DF = \frac{1}{2}CE$$

$$\frac{DF}{CE} = \frac{FJ}{JE} = \frac{1}{2} \Rightarrow FJ = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

به کمک قضیه استوارت: (ویژه دانش‌آموزان رشته ریاضی)

$$CE^2 = \frac{6 \times 36 + 3 \times 81}{9} - 3 \times 6 = 33 \Rightarrow CE = \sqrt{33}$$

$$\xrightarrow{DF = \frac{1}{2}CE} DF = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$\frac{AE}{AD} = \frac{1}{3} = \frac{AE}{BC} = \frac{AF}{FC} = \frac{EF}{FB}$
 $\frac{EF}{AF} = \frac{x}{y} = \frac{BE}{AC} = \frac{rx}{ry}$
 $BE^2 = 9 + 1 = 10 \Rightarrow BE = \sqrt{10}$
 $AC^2 = 9 + 9 = 18 \Rightarrow AC = 3\sqrt{2}$
 $\Rightarrow \frac{EF}{AF} = \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$(BC)^2 = (2x)^2 = y^2 + 9y^2 = 10y^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{10}}{2}y$$

در هر مثلث برای طول میانه m_a با اضلاع a, b و c داریم: $2m_a^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2$.
 میانه‌ها به نسبت ۱ به ۲ یکدیگر را قطع می‌کنند. در مثلث ACD ، AE و DO میانه هستند، پس یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند. بنابراین: $EF = \frac{1}{3}AE$

$2AE^2 + \frac{DC^2}{2} = AC^2 + AD^2 \Rightarrow 2AE^2 + \frac{4x^2}{2} = 4y^2 + 4x^2$
 $\Rightarrow 2AE^2 = 4y^2 + 2x^2 \xrightarrow{x = \frac{\sqrt{10}}{2}y} 2AE^2 = 4y^2 + 5y^2 = 9y^2$
 $\Rightarrow AE = \frac{3}{\sqrt{2}}y \xrightarrow{EF = \frac{1}{3}AE} EF = \frac{1}{\sqrt{2}}y$
 $\frac{EF}{AB} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}y}{2x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}y}{2 \times \frac{\sqrt{10}}{2}y} = \frac{\sqrt{5}}{10}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

$$CF \parallel AB : \frac{CF}{12} = \frac{4}{12} = \frac{DF}{DF+8} \Rightarrow CF = 4, DF = 4$$

پس مثلث‌های ABD و FCD متساوی‌الاضلاع هستند.

$$AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2AB \cdot CB \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow AC^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \times 12 \times 8 \times \frac{1}{2} = 112 \Rightarrow AC = 4\sqrt{7}$$

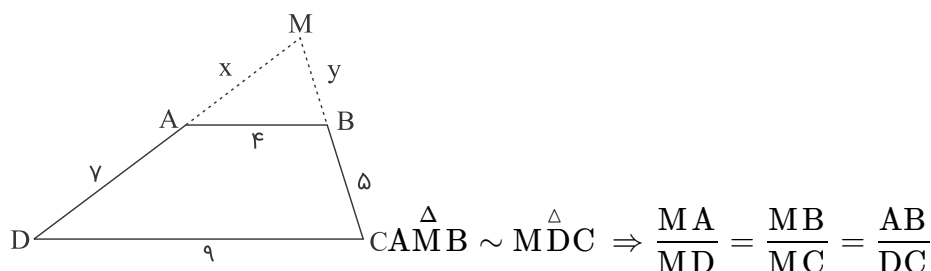
$$\triangle ACF \sim \triangle DFE \Rightarrow \frac{ED}{AC} = \frac{FD}{AF} \Rightarrow \frac{ED}{4\sqrt{7}} = \frac{4}{8} \Rightarrow ED = 2\sqrt{7}$$

نکته (قضیه کسینوس‌ها): در مثلث دلخواه ABC داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

می‌دانیم در دوزنقه $ABCD$ ، دو قاعده AB و DC باهم موازی هستند، بنابراین طبق قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها، دو مثلث AMB و MDC متشابه هستند.



بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \frac{x}{x+7} = \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+7} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9x = 4x + 28 \Rightarrow 5x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{5} \\ \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9y = 4y + 20 \Rightarrow 5y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{5} = 4 \end{cases}$$

حال محیط را به دست می‌آوریم:

$$\triangle AMB \text{ محیط} = x + y + 4 = \frac{28}{5} + 4 + 4 = 8 + \frac{28}{5} = \frac{40 + 28}{5} = \frac{68}{5} = 13\frac{3}{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

$$3y = 5x \Rightarrow y = \frac{5}{3}x$$

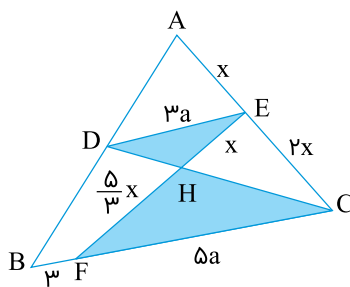
$$EC = 1/2y = \frac{12}{10} \times \frac{5}{3}x = 2x$$

$$FH = y = \frac{5}{3}x$$

دو مثلث DHE و HFC با هم متشابه‌اند، پس:

$$\frac{FH}{HE} = \frac{FC}{DE} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{DE}{FC} \Rightarrow \frac{DE}{FC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} DE = 3a \\ FC = 5a \end{cases}$$

در مثلث ABC قضیه تالس را اعمال می‌کنیم:



$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{3a}{3+5a} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \Rightarrow 9a = 3 + 5a \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$BC = 3 + 5a = 3 + 5 \times \frac{3}{4} = 3 + \frac{15}{4} = 3 + 3\frac{3}{4} = 6\frac{3}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

دو مثلث AED و ABC به حالت دو زاویه متشابه‌اند، زیرا: $\hat{A} = \hat{A}$, $\hat{C} = \hat{AED}$
حال نسبت تشابه را می‌نویسیم:

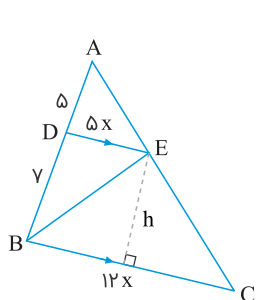
$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{2}{x+1} \Rightarrow x^2 + x = 30 \Rightarrow x^2 + x - 30 = 0$$

$$\Rightarrow (x+6)(x-5) = 0 \xrightarrow{x>0} x = 5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

قاعده هر دو مثلث DE است و ارتفاع هر دو یکسان است، پس مساحت‌های برابر دارند.

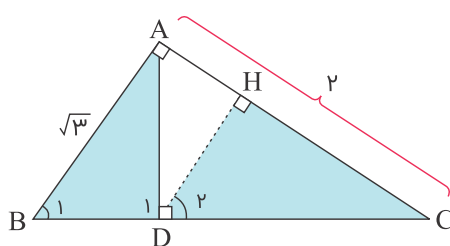
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱



$$\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{\frac{1}{2} \times h \times BC}{\frac{1}{2} \times h \times DE} = \frac{BC}{DE} = \frac{12x}{6x} = \frac{12}{6} = 2/1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

طبق قضیه فیثاغورس در مثلث $\triangle ABC$ داریم:



$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow 3 + 4 = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DH, \text{ مورب } BC \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{B}_1 \\ \widehat{D}_1 = \widehat{H} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle HCD$$

طبق روابط طولی در مثلث $\triangle ABC$ نتیجه می‌گیریم:

$$AC^2 = BC \times CD$$

$$\Rightarrow 4 = \sqrt{7} \times CD \Rightarrow CD = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

بنابراین نسبت تشابه دو مثلث ABD و HCD برابر است با:

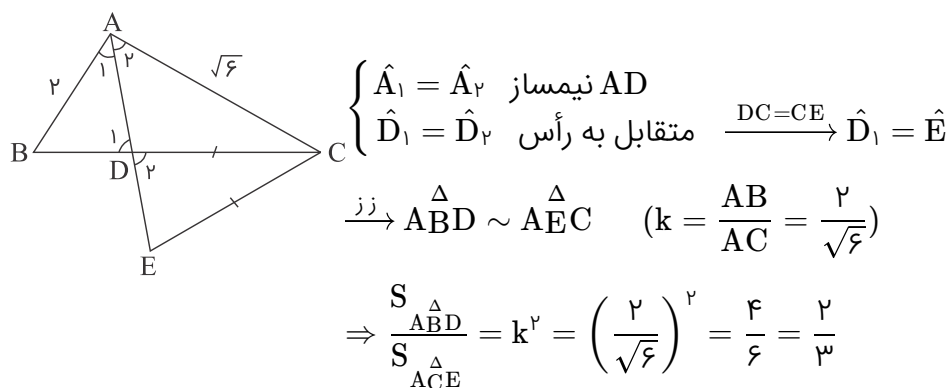
$$K = \frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$$

می‌دانیم که نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر است با مجذور نسبت تشابه، پس داریم:

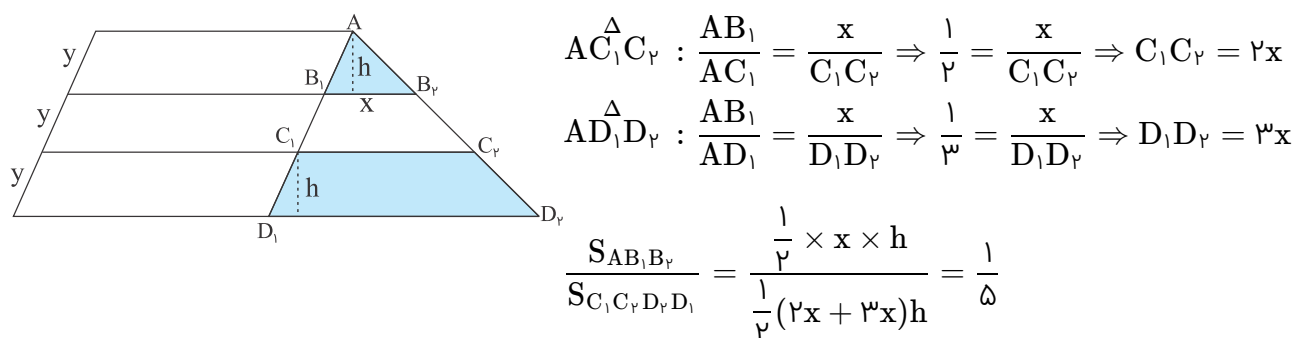
$$\frac{S_{\triangle HCD}}{S_{\triangle ABD}} = K^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{21}} \right)^2 = \frac{16}{21}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

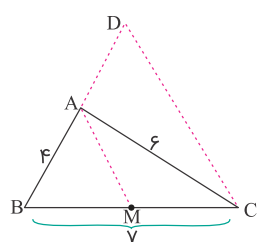
طبق شکل داریم:



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

فرض کنید $B_1B_2 = x$ باشد. در این صورت داریم:

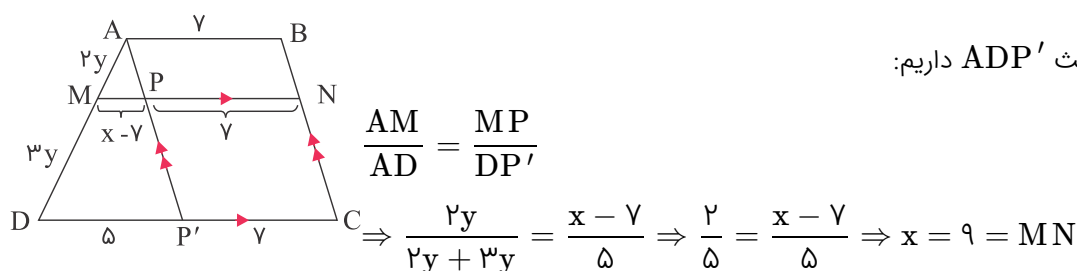
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

در مثلث BDC می‌دانیم $AM \parallel CD$ است. به کمک رابطه تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{4}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow BD = 8$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

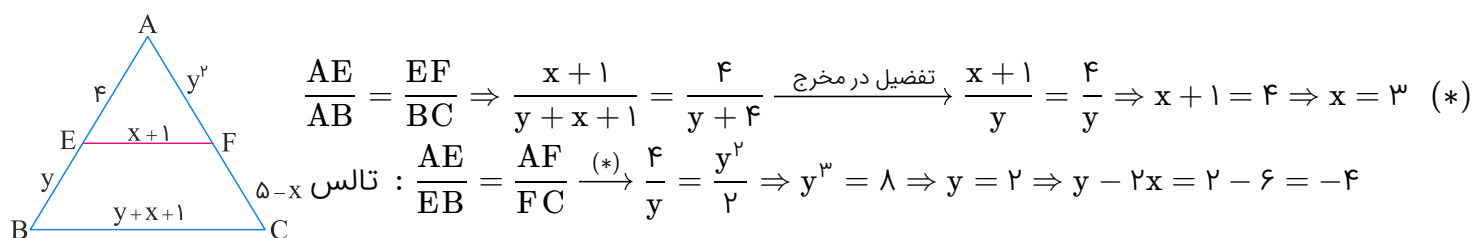
در دوزنقه ABCD از نقطه A خطی موازی با خط BC رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با MN و DC به ترتیب P و P' می‌نامیم.



با استفاده از تعمیم تالس در مثلث ADP' داریم:

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

چون $EF \parallel BC$ ، طبق تعمیم قضیه تالس داریم:



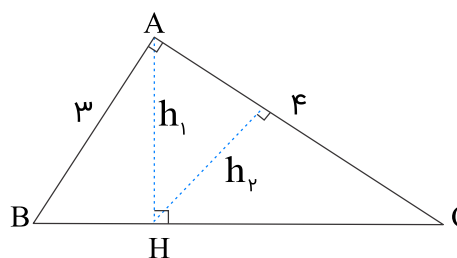
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

$$\Delta OCD \sim \Delta OEF \Rightarrow \frac{OC}{OE} = \frac{y}{4} = \frac{1}{y} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ OC = 6 \end{cases}$$

$$\Delta OAB : \frac{y}{2x} = \frac{4}{x + 4} \xrightarrow{y=2} \frac{2}{2x} = \frac{4}{x + 4} \Rightarrow 4x = x + 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$\Delta OAB : \frac{y}{2x} = \frac{OC}{OC + AC} \Rightarrow \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{6}{6 + AC} \Rightarrow 6 + AC = 8 \Rightarrow AC = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰



$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

راه حل اول:

$$\begin{cases} \hat{C} \text{ مشترک} \\ \hat{AHC} = \hat{A} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle AHC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$$

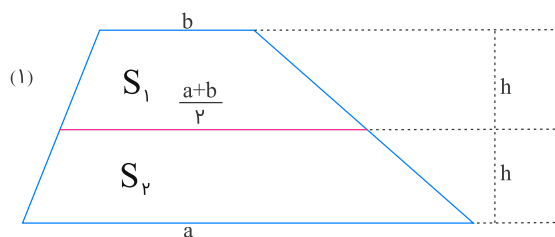
راه حل دوم:

$$\triangle ABC : \begin{cases} h_1 \times BC = AB \times AC \Rightarrow 5h_1 = 3 \times 4 \Rightarrow h_1 = \frac{12}{5} \\ AC^2 = HC \times BC \Rightarrow 16 = 5HC \Rightarrow HC = \frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\triangle AHC : h_2 \times AC = h_1 \times HC \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{HC}{AC} = \frac{\frac{16}{5}}{4} = \frac{4}{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

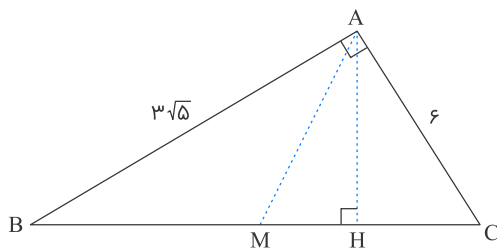
پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک دوزنقه را به هم وصل می‌کند، برابر است با میانگین طول دو قاعده. بنابراین طول پاره‌خط وسط برابر $\frac{a+b}{2}$ است.



$$S_2 = 2S_1 \Rightarrow \frac{1}{2}h(a + \frac{a+b}{2}) = 2 \times \frac{1}{2}h(b + \frac{a+b}{2})$$

$$\Rightarrow \frac{3a+b}{2} = 3b+a \Rightarrow 3a+b = 6b+2a \Rightarrow a = 5b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸



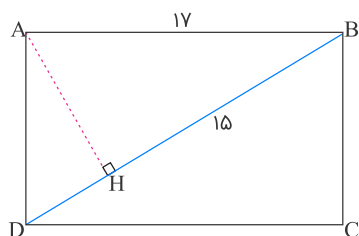
$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow BC = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{5})^2} = 9 \Rightarrow MC = MB = 4/5$$

$$\Delta ABC : AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 45 = BH \times 9$$

$$\Rightarrow BH = 5 \Rightarrow HM = BH - MB = 5 - 4/5 = 9/5$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AHM}} = \frac{\frac{AH \times BC}{2}}{\frac{AH \times HM}{2}} = \frac{AH \times 9}{AH \times \frac{9}{5}} = 5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸



$$AB^2 = BH \times BD$$

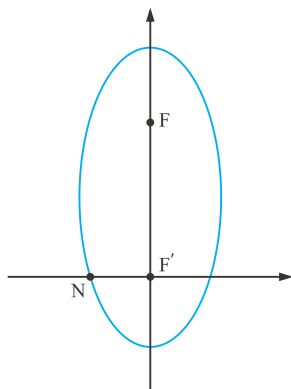
$$17^2 = 15 \times BD \Rightarrow BD = \frac{17^2}{15}$$

میزان اختلاف طول قطر از عدد ۱۹ را می‌خواهیم:

$$\frac{17^2}{15} - 19 = \frac{17^2 - 15 \times 19}{15} = \frac{289 - 285}{15} = \frac{4}{15}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

حروف داده شده را عوض می‌کنیم و کانون‌ها را $F(0, x)$ و $F'(0, 0)$ در نظر می‌گیریم. طبق داده مسئله، $N(-3, 0)$ است. پس:



$$\frac{b^2}{a} = |NF'| = 3 \Rightarrow b^2 = 3a$$

$$FF' = 2c = m \Rightarrow c = \frac{m}{2}$$

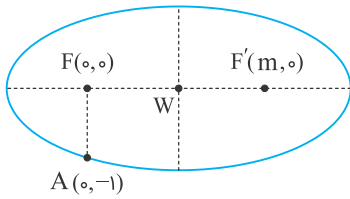
$$\frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = c\sqrt{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2c^2 = 3a + c^2 \Rightarrow c^2 = 3c\sqrt{2} \Rightarrow c = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a = 6 \Rightarrow b^2 = 18 \Rightarrow b = 3\sqrt{2} \Rightarrow 2b = 6\sqrt{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

اسامی داده شده را تغییر داده ایم.



$$FA = \frac{b^2}{a} = 1 \Rightarrow b^2 = a$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{4}{5}$$

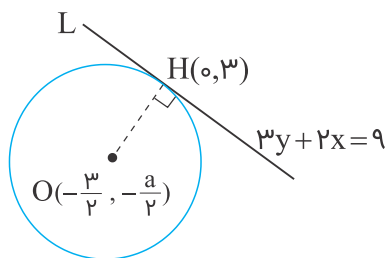
$$\Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{5} \xrightarrow{b^2=a} 1 - \frac{1}{a} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{5} \Rightarrow a = 5$$

$$2c = m \Rightarrow c = \frac{m}{2} \Rightarrow \frac{\frac{m^2}{4}}{25} = \frac{4}{5} \Rightarrow m^2 = 5 \times 16$$

$$\Rightarrow m = 4\sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳



OH بر خط L عمود است.

$$\frac{-\frac{a}{2} - 3}{-\frac{3}{2} - 0} \times \frac{-2}{3} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a}{2} + 3}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} + 3 = \frac{9}{2} \xrightarrow{\times 2}$$

$$2a + 12 = 9 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} = -1/5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

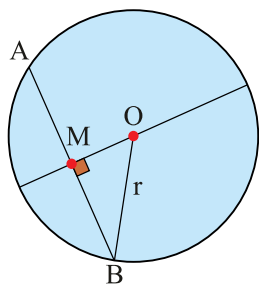
$$x^2 + y^2 - 3x - 5y + \frac{1}{2} = 0$$

نقطه $(-1, \frac{5}{2})$ را در معادله دایره جایگذاری می‌کنیم:

$$(-1)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3(-1) - 5\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 + \frac{25}{4} + 3 - \frac{25}{2} + \frac{1}{2} = \frac{-7}{4}$$

$$\text{طول کوتاه‌ترین وتر} = 2\sqrt{\frac{7}{4}} = \sqrt{7}$$

برای به دست آوردن طول کوتاه‌ترین وتر از روش دیگری نیز می‌توان استفاده کرد:

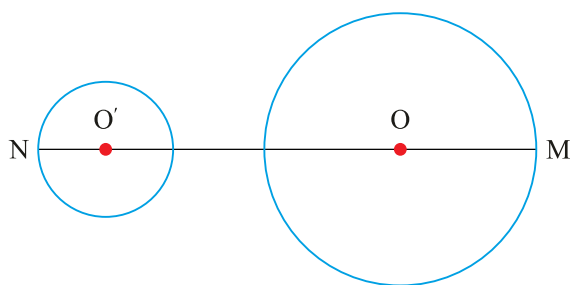


$$O\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right), M\left(-1, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow OM = \frac{5}{2}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 25 - 2} = \frac{1}{2}\sqrt{32} \Rightarrow MB = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow AB = 2 \times \frac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲



$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - a = 0 \Rightarrow O(1, -1), r = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4 + 4 + 4a} = \sqrt{2 + a}$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 6y + 6a = 0$$

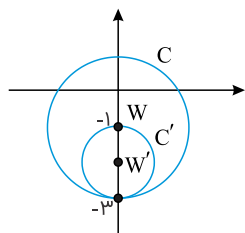
$$\Rightarrow O'(-3, 3), r' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{36 + 36 - 24a} = \sqrt{12 - 6a}$$

$$OO' = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

$$MN = 4\sqrt{2} + \sqrt{2 + a} + \sqrt{12 - 6a} = 8 \Rightarrow a = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

$$C: x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow W(0, -1), r = 2$$



درواقع چون دایره C از $(0, -3)$ عبور می‌کند، اگر دایره جدید بخواند با دایره قبلی مماس داخل باشد و از این نقطه نیز بگذرد تنها حالت آن است که نقطه تماس همین نقطه باشد. در نتیجه $W'(0, -2)$ و $r' = 1$ خواهد بود.

$$C': (x - 0)^2 + (y + 2)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

دایره اول:

$$x^2 + y^2 + 2y - 4x = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

$$O_1(2, -1) \quad , \quad r_1 = \sqrt{5}$$

دایره دوم:

$$x^2 + y^2 - 2y = 2 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 3$$

$$O_2(0, 1) \quad , \quad r_2 = \sqrt{3}$$

$$O_1O_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow O_1O_2 \simeq 2/8$$

$$r_1 + r_2 \simeq 3/9$$

$$|r_1 - r_2| = 0/5$$

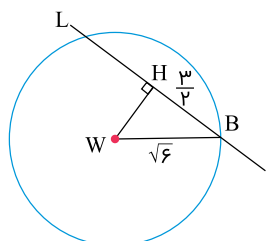
$$\Rightarrow 0/5 < O_1O_2 < 3/9$$

پس دو دایره متقاطع‌اند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

مرکز و شعاع دایره را حساب می‌کنیم:

$$W(2, -1) \quad , \quad r = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$



$$|WH| = \frac{|-2 + 2 - a|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|a|}{\sqrt{5}}$$

$$\triangle WHB : 6 = \frac{9}{4} + \frac{a^2}{5} \Rightarrow \frac{a^2}{5} = \frac{15}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{75}{4} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ a_2 = -\frac{5\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow |a_1 - a_2| = 5\sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$\begin{cases} c = ۱۲ \\ ۲b = ۱۸ \Rightarrow b = ۹ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ = ۸۱ + ۱۴۴ = ۲۲۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = ۱۵ \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۱۲}{۱۵} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

معادله گسترده دو دایره را از هم کم می‌کنیم تا معادله وتر مشترک به دست آید:

$$(x^۲ + y^۲ + ۲x - ۳) - (x^۲ + y^۲ + ۲y - ۳) = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x - ۲y = ۰ \Rightarrow x = y \text{ : وتر مشترک}$$

معادله درجه اولی که از کم کردن معادله دو دایره به دست می‌آید، حتما معادله وتر مشترک است، چون هم یک معادله درجه اول است و هم (x, y) این خط در هر دو دایره صدق می‌کند.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

فاصله کانون‌های $F(۲, ۷)$ و $F'(۲, -۱)$ برابر $۲c$ است.

$$۲c = |FF'| = |۷ - (-۱)| = ۸ \Rightarrow c = ۴$$

قطر کوچک برابر ۶ است، پس:

$$۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$

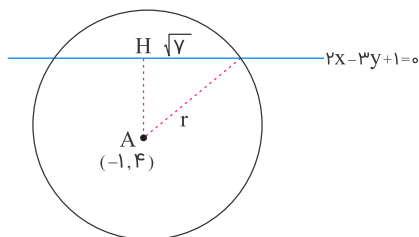
در بیضی رابطه $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است.

$$a^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵$$

$$\text{خروج از مرکز} = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

فاصله مرکز دایره از خط برابر AH است. داریم:



$$AH = \frac{|2(-1) - 3(4) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

همچنین می‌دانیم شعاع عمود بر وتر در دایره، وتر را نصف می‌کند. پس:

$$r^2 = AH^2 + \sqrt{V}^2 \Rightarrow r^2 = 13 + V = 20$$

معادله دایره را می‌نویسیم:

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 20 \xrightarrow{y=2} (x+1)^2 + 4 = 20 \Rightarrow (x+1)^2 = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases}$$