



منبع:

گزینه ۱

۱

معادله خط گذرا از دو نقطه $(\frac{2}{5}, 6)$ و $(-\frac{5}{2}, -12)$ را می‌نویسیم:

$$y - 6 = \frac{6 + 12}{\frac{2}{5} + \frac{5}{2}}(x - \frac{2}{5}) \Rightarrow y = 6x - 9$$

معادله برخورد را تشکیل می‌دهیم و از آن، ریشه مضاعف می‌گیریم:

$$\frac{a}{2x-1} = 6x-9 \Rightarrow 12x^2 - 18x - 6x + 9 = a$$

$$\Rightarrow 12x^2 - 24x + 9 - a = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 24^2 - 4 \times 12(9 - a) = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$f(5) = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

گزینه ۴

۲

سهمی را با خط $y = -x$ قطع می‌دهیم.

$$ax^2 + 7x + 16a = -x \Rightarrow ax^2 + 8x + 16a = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 8^2 - 4a \times 16a = 0 \Rightarrow 64 = 64a^2 \Rightarrow a = \pm 1$$

معادله (۱)، باید ریشه مضاعف با طول مثبت داشته باشد.

$$x_1 = x_2 = -\frac{8}{2a} = -\frac{4}{a} > 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow a = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

گزینه ۲

۳

$$2ax^2 - 5x + 18a = x \Rightarrow 2ax^2 - 6x + 18a = 0$$

$$\Rightarrow ax^2 - 3x + 9a = 0 \xrightarrow{\Delta=0} 9 - 36a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

طول نقطه تماس، برابر $\frac{3}{2a}$ و در ناحیه سوم قرار دارد؛ بنابراین $a < 0$ قابل قبول است. پس $a = -\frac{1}{2}$ خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

معادله خطی که از نقطه $(-1, 1)$ و $(2, 2)$ می‌گذرد، به صورت زیر است:

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

این خط، وقتی بر تابع $f(x) = \sqrt{ax - 1}$ مماس است که معادله زیر، ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\sqrt{ax - 1} = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow 9(ax - 1) = x^2 + 8x + 16$$

$$\Rightarrow x^2 + (\lambda - 9a)x + 25 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} (\lambda - 9a)^2 - 100 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda - 9a = 10 \Rightarrow a = -\frac{2}{9} \\ \lambda - 9a = -10 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

$a = -\frac{2}{9}$ قابل قبول نیست؛ زیرا در این صورت $f(5)$ تعریف نمی‌شود.

$$a = 2 \Rightarrow f(5) = \sqrt{10 - 1} = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

$$g'f'(g) = (fog)'$$

$$D_g(-\infty, 0) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x^3 + x^3} = \frac{1}{2x^3}$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2x^3} - \left|\frac{1}{2x^3}\right|}} \stackrel{g \leq 0}{=} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2x^3}}} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

$$(fog)'(x) = (x)' = 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲



$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = -11 \Rightarrow \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = -11 \Rightarrow 1 - \lambda(1 - a) = -11$$

$$\Rightarrow \lambda(1 - a) = 12 \Rightarrow 1 - a = \frac{12}{\lambda} \Rightarrow a = -\frac{1}{\lambda}$$

$$f(x) = (x^2 + 1)^3 \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$f'(x) = 3(2x)(x^2 + 1)^2 \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) - \frac{1}{\lambda}(x^2 + 1)^3$$

$$f'(-2a) = f'(1) = 3 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \times 8 = 12 - 4 = 8$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

$$\forall y - x = 5 \Rightarrow y = \frac{x+5}{\lambda}$$

$$\frac{ax-1}{3x+1} = \frac{x+5}{\lambda} \Rightarrow 3x^2 + 15x + x + 5 = \lambda ax - \lambda$$

$$\Rightarrow 3x^2 + (16 - \lambda a)x + 12 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (16 - \lambda a)^2 - 12^2 = 0 \Rightarrow (16 - \lambda a)^2 = 12^2 \Rightarrow \begin{cases} 16 - \lambda a = 12 \\ 16 - \lambda a = -12 \end{cases}$$

باید معادله (۱) ریشه مضاعف مثبت داشته باشد، بنابراین $16 - \lambda a < 0$ است.

$$16 - \lambda a = -12 \Rightarrow \lambda a = 28 \Rightarrow a = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

$$f(x) = \begin{cases} ax^r + bx + a - b & ; x \geq k \\ \varphi ax + b & ; x < k \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k) \Rightarrow ak^r + bk + a - b = \varphi ak + b$$

$$\Rightarrow ak^r + (b - \varphi a)k + a - \varphi b = 0 \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \varphi ax + b & ; x \geq k \\ \varphi a & ; x < k \end{cases}$$

$$f'_+(k) = f'_-(k) \Rightarrow \varphi ak + b = \varphi a \quad (2)$$

$$(1), (2) : ak^r + (\varphi a - \varphi ak - \varphi a)k + a - \varphi(\varphi a - \varphi ak) = 0$$

$$\Rightarrow ak^r - \varphi ak^r + a - \varphi a + \varphi ak = 0$$

$$\Rightarrow -ak^r + \varphi ak - \varphi a = 0 \Rightarrow -k^r + \varphi k - \varphi = 0 \Rightarrow k = 1, \varphi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

$$g'(x)f'(g(x)) = (f \circ g)'(x)$$

$$x > 0 : g(x) = \frac{1}{\varphi x^\delta}, \quad x > 0 : f(x) = \frac{-1}{\sqrt[\delta]{\varphi x}}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \stackrel{x > 0}{=} -\frac{1}{\sqrt[\delta]{\varphi \left(\frac{1}{\varphi x^\delta}\right)}} = -x$$

$$(f \circ g)'(x) = -1 \Rightarrow (f \circ g)'(\sqrt[\delta]{\varphi}) = g'(\sqrt[\delta]{\varphi})f'(g(\sqrt[\delta]{\varphi})) = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

$$y = f \circ g(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

$$\xrightarrow{x=\varphi} y'(\varphi) = g'(\varphi)f'(g(\varphi)) \Rightarrow \varphi = g'(\varphi)f'\left(\frac{\varphi+1}{\varphi-1}\right) \Rightarrow \varphi = g'(\varphi)f'(\delta) \quad (1)$$

$$g(x) = \frac{\varphi x + 1}{x - 1} \Rightarrow g'(x) = \frac{\varphi(x-1) - (\varphi x + 1)}{(x-1)^2} = \frac{-\varphi}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow g'(\varphi) = -\varphi$$

$$(1) : \varphi = -\varphi f'(\delta) \Rightarrow f'(\delta) = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

اطلاعات مسئله نشان می‌دهد که $f(-1) = 5$ و $f'(-1) = -\frac{1}{2}$ است.

$$g(x) = \sqrt[3]{x}f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}f(x) + \sqrt[3]{x}f'(x)$$

$$g'(-1) = \frac{1}{3}f(-1) - f'(-1) = \frac{1}{3} \times 5 + \frac{1}{2} = \frac{5}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{6}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$x = 1$ ، عرض دو تابع را مقدار یکسانی قرار می‌دهد:

$$2 + b = \frac{1+a}{a+1} = 1 \Rightarrow b = -1$$

پس توابع به صورت $y = 2x - 1$ و $y = \frac{x+a}{ax+1}$ هستند و در $x = 1$ مشتق یکسانی دارند.

$$y' = 2$$

$$y' = \frac{1-a^2}{(ax+1)^2} \xrightarrow{x=1} \frac{1-a^2}{(a+1)^2}$$

حال داریم:

$$\frac{1-a^2}{(a+1)^2} = 2 \Rightarrow \frac{1-a}{(a+1)} = 2$$

$$\Rightarrow 2a + 2 = 1 - a \Rightarrow 3a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$a - b = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ مشتق پذیر است، هرگاه:

(۱) در نقطه $x = a$ پیوسته باشد.

(۲) مشتق چپ و راست در نقطه $x = a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = f(-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \sqrt{5 - 2x} = \sqrt{5 - 2(-2)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left(-\frac{1}{2}x^2 + bx + c\right) = -\frac{1}{2}(-2)^2 + b(-2) + c = -2 - 2b + c$$

$$f(-2) = \sqrt{5 - 2(-2)} = 3$$

$$\Rightarrow -2 - 2b + c = 3 \Rightarrow -2b + c = 5 \quad (*)$$

اکنون شرط مشتق پذیری را بررسی می‌کنیم:

$$f'_-(-2) = f'_+(-2)$$

$$\begin{cases} f'_-(x) = \frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} \Rightarrow f'_-(-2) = \frac{-2}{2 \times 3} = -\frac{1}{3} \\ f'_+(x) = -x + b \Rightarrow f'_+(-2) = 2 + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} = 2 + b \Rightarrow b = -\frac{7}{3} \xrightarrow{(*)} -2\left(-\frac{7}{3}\right) + c = 5$$

$$\Rightarrow c = 5 - \frac{14}{3} = \frac{1}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\left(\frac{1}{2}\right) - 1}{2(1-1)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f'(x)}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$$

$$f(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2x^2 + x - 1} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(2x^2 + x - 1) - (2x + 1)(x^{\frac{3}{2}})}{(2x^2 + x - 1)^2}$$

$$\xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{\frac{3}{2}(2+1-1) - (2+1)(1)}{(2+1-1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

$$y' = \frac{(2x + m)(x + 3) - (x^2 + mx + 1)}{(x + 3)^2}$$

$$\Rightarrow y'(1) = \frac{(2 + m)(4) - (m + 2)}{16} = \frac{3m + 6}{16} \quad (1)$$

$$4y - 3x = n \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{n}{4} \Rightarrow y'(1) = \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{3m + 6}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3m + 6 = 12 \Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = 2$$

$$y(1) = \frac{m + 2}{4} \xrightarrow{m=2} y(1) = 1$$

$$y - 1 = \frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow 4y - 3x = 1 \Rightarrow n = 1$$

$$\Rightarrow m + n = 2 + 1 = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

تابع باید در $x = 2$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\lambda}{ax + b} = \frac{\lambda}{2a + b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 6x) = -\lambda + 12 = 4 \Rightarrow \frac{\lambda}{2a + b} = 4 \Rightarrow 2a + b = 2$$

مشتق چپ و راست هم باید در این نقطه برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-\lambda a}{(ax + b)^2} & ; x > 2 \\ -2x + 6 & ; x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(2) = \frac{-\lambda a}{(2a + b)^2} = \frac{-\lambda a}{2^2} = -2a \\ f'_-(2) = -12 + 6 = -6 \end{cases} \Rightarrow -2a = -6 \Rightarrow a = 3, \quad b = -4$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} \\
 \Rightarrow f'(x) &= \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} + \frac{1}{3} \times \frac{3(x+2) - (3x+1)}{(x+2)^2} \times \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2}} \times x \\
 &= \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} + \frac{5x}{3(x+2)^2 \sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2}} \xrightarrow{x=-2} 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

می‌دانیم: $(f \circ g(x))' = g'(x) f'(g(x))$

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} \Rightarrow g'(x) = \frac{\frac{-2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \frac{-2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} \\
 \Rightarrow g'\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{-2 \times \frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{\left(\frac{9}{2}-1\right)^4}} = \frac{\frac{-6}{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{16}}} = \frac{-6 \times 16}{\sqrt[3]{16}} = \frac{-16}{\sqrt{2}} = -8\sqrt{2} \\
 g\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{2}-1}} = 2
 \end{aligned}$$

حال باید $f'(2)$ را حساب کنیم. در همسایگی $x=2$ حاصل برکت ۴ می‌شود.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 16x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 32x \Rightarrow f'(2) = 64 \\
 (f \circ g)'\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) &= -8\sqrt{2} \times 64 = (-128\sqrt{2}) \times 4
 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + \omega x + b & ; x \leq 2 \\ 2ax + \omega & ; x > 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2ax + \omega & ; x \leq 2 \\ 2a & ; x > 2 \end{cases}$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 4a + \omega = 2a \Rightarrow a = \frac{-\omega}{2}$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow 4a + 2\omega + b = 4a + \omega \Rightarrow b = -\omega$$

$$a + b = \frac{-\omega}{2} - \omega = \frac{-3\omega}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow g'(x) = \frac{0 - \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} = \frac{-x}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\frac{-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}} = -4\sqrt{5}$$

در حالتی که f' وجود داشته باشد، داریم:

$$f(x) = (x[x])^3 \Rightarrow f'(x) = 3(x[x])^2 [x]$$

برای همسایگی چپ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ داریم:

$$x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^- \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^-}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^-} = 2^+$$

$$y = (f \circ g)(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

برای همسایگی چپ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ داریم:

$$y'\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^-\right) = g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)f'(g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^-) = (-4\sqrt{5})f'(2^+) = (-4\sqrt{5}) \times 3(2)^2 \times 2 = (-48\sqrt{5})(8)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

راه حل اول: وارون تابع را حساب می‌کنیم، سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$y = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \Rightarrow y\sqrt{x} - y = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x}(y - 1) = y + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{y + 1}{y - 1}$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{y + 1}{y - 1}\right)^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2 = g(x)$$

$$g'(x) = 2\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) \times \frac{-2}{(x - 1)^3} \Rightarrow g'(2) = 2 \times 3 \times \frac{-2}{1} = -12$$

راه حل دوم: اگر نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر f^{-1} باشد، آنگاه متناظر با آن نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر f خواهد بود.

$$2 = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \Rightarrow 2\sqrt{x} - 2 = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow x = 9$$

پس نقطه $A(9, 2)$ روی f قرار دارد.

$$f'(x) = \frac{-2}{(\sqrt{x} - 1)^3} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(9) = \frac{-2}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{-1}{12}$$

پس شیب خط مماس بر f^{-1} در نقطه $A'(2, 9)$ برابر -12 است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x}}{x^3 - x}\right)^3 = \frac{x^3 + 2x}{(x^3 - x)^3}$$

سپس مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{(x^3 + 2x)'(x^3 - x)^3 - ((x^3 - x)^3)'(x^3 + 2x)}{(x^3 - x)^6}$$

$$= \frac{(3x^2 + 2)(x^3 - x)^3 - (3(x^3 - x)^2)(x^3 + 2x)}{(x^3 - x)^6}$$

$$f'(2) = \frac{6 \times 8 - 3 \times 3 \times 4 \times 8}{64} = -\frac{15}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

$$f(x) = \left(\frac{2x - x^2}{3x + 5} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{2x - x^2}{3x + 5} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{(2 - 2x)(3x + 5) - 3(2x - x^2)}{(3x + 5)^3} \right)$$

$$\Rightarrow f'(-2) = \frac{2}{3} \left(\frac{-4 - 4}{-6 + 5} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{6(-1) - 3(-4 - 4)}{(-6 + 5)^3} \right)$$

$$= \frac{2}{3} (8)^{-\frac{2}{3}} (-6 + 24) = \frac{2 \times 18}{3 \sqrt[3]{8}} = 6$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

$$\begin{cases} f(2) = \frac{2+2}{2-1} = 4 \\ g(2) = 4a + 2b \end{cases} \xrightarrow{f(2)=g(2)} 4a + 2b = 4 \quad (1)$$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(2) = -3 \\ g'(x) = 2ax + b \Rightarrow g'(2) = 4a + b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'(2)=g'(2)} 4a + b = -3 \quad (2)$$

باتوجه به (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 4 \\ 4a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow b = 7$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

برابر $f'(4)$ است، بنابراین برای به دست آوردن $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ کافی است $f'(4)$ را محاسبه کنیم:

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 - 2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5 - 2x) + 2(1 + \sqrt{x})}{(5 - 2x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \frac{\frac{1}{4}(5 - 8) + 2(1 + 2)}{(5 - 8)^2} = \frac{-\frac{3}{4} + 6}{9} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸



زمانی تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است که در $x = 2$ مشتق داشته باشد.
بنابراین باید f در $x = 2$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست آن برابر باشد.

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow -4 + 2a + b = 1 \Rightarrow 2a + b = 5 \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & ; x \geq 2 \\ -2x + a & ; x < 2 \end{cases}$$

$$f'_-(2) = f'_+(2) \Rightarrow -4 + a = -1 \Rightarrow a = 3$$

$$(1) : 6 + b = 5 \Rightarrow b = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) - (\frac{1}{2} - 1)}{3} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{3} = \frac{11}{4}$$

$$\text{اختلاف} : \frac{11}{4} - \frac{9}{4} = \frac{2}{4} = 0.5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

شیب پاره خطی که ابتدا و انتهای بازه را به هم وصل می‌کند، پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{4x - 5}{x + 1} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -5 \\ f(8) = \frac{27}{9} = 3 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{3 - (-5)}{8 - 0} = 1$$

بنابراین شیب خط مماس هم باید ۱ باشد:

$$f'(x) = \frac{4(x+1) - (4x-5)}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{9}{(x+1)^2} = 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 = 3 \Rightarrow x = 2 \text{ ق.ق} \\ x+1 = -3 \Rightarrow x = -4 \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

خطی را می‌خواهیم که در $x = 2$ بر منحنی مماس است:

$$f(2) = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow (2, 1), m = 1$$

$$y - 1 = 1(x - 2) \xrightarrow{x=0} y = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

حاصل $f'(\frac{1}{4})$ را می‌خواهیم:

$$f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(-x-1)}{x}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{4}} \frac{-\frac{1}{2} - 1(-\frac{5}{4})}{\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸