



واسه دریافت سگفتانه بزن رولوگو 😊

گزینه ۱

۱

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} - \frac{1}{\cot \alpha} &= \frac{1}{|\cos \alpha|} - \frac{\sin \alpha}{|\cos \alpha|} \\ \Rightarrow \frac{1}{\cot \alpha} &= \frac{\sin \alpha}{|\cos \alpha|} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{|\cos \alpha|} \Rightarrow \cos \alpha > 0 \\ \cot \alpha &= -\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{\cos \alpha}{|\sin \alpha|} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{\cos \alpha}{|\sin \alpha|} \\ \Rightarrow |\sin \alpha| &= -\sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha < 0 \end{aligned}$$

چون $\cos \alpha > 0$ و $\sin \alpha < 0$ است، بنابراین α در ناحیه چهارم قرار دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

گزینه ۲

۲

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} - \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|} \Rightarrow \frac{1}{|\cos \alpha|} - \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|} = \operatorname{tg} \alpha \\ \Rightarrow -\frac{\sin \alpha}{|\cos \alpha|} &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow -\frac{1}{|\cos \alpha|} = \frac{1}{\cos \alpha} \\ \Rightarrow \cos \alpha < 0 &\Rightarrow \alpha \text{ در ناحیه دوم یا سوم قرار دارد} \quad (۱) \\ \frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} &= -\frac{1}{\cot \alpha} \Rightarrow \frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow |\sin \alpha| = -\sin \alpha \\ \Rightarrow \sin \alpha < 0 &\Rightarrow \alpha \text{ در ناحیه سوم یا چهارم قرار دارد} \quad (۲) \end{aligned}$$

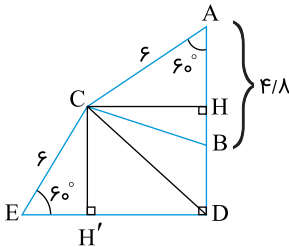
باتوجه به (۱) و (۲)، زاویه α در ناحیه سوم قرار دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

$$\frac{1}{2} \times AC \times AB \times \sin 60^\circ = \frac{7}{2} \times \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} \times AC \times \frac{4}{\lambda} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{2} \times \sqrt{3} \Rightarrow AC = 6 \Rightarrow EC = 6$$

در مثلث AHC داریم:



$$\sin 60^\circ = \frac{CH}{6} \Rightarrow CH = 3\sqrt{3}$$

دو مثلث CEH' و ACH هم‌نهشت‌اند، پس در نتیجه $CH' = 3\sqrt{3}$. بنابراین چهارضلعی HCH'D مربع است و داریم:

$$DC = 3\sqrt{3} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{6}$$

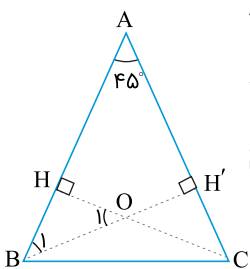
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 2 \Rightarrow \tan^2 \alpha = 4 \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 5 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{10}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲



$$\hat{A} = 45^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{B}_1 = 45$$

$$\Delta AHC : AH = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \Rightarrow HB = HO = \lambda - 4\sqrt{2}$$

$$S_{OHB} = \frac{1}{2} (\lambda - 4\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} \times 16 (2 - \sqrt{2})^2 = 8 (6 - 4\sqrt{2}) = 16 (3 - 2\sqrt{2}) = \frac{16}{3 + 2\sqrt{2}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰



$$2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin^2 x + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + 1 = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

$$\frac{3\cos(24^\circ) - 2\sin(15^\circ)}{\sin(20^\circ) - \cos(29^\circ)} = \frac{3\cos(270^\circ - 22^\circ) - 2\sin(180^\circ - 22^\circ)}{\sin(180^\circ + 22^\circ) - \cos(270^\circ + 22^\circ)}$$

$$= \frac{-3\sin 22^\circ - 2\sin 22^\circ}{-\sin 22^\circ - \sin 22^\circ} = \frac{5}{2} = 2.5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{1/5}{2} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{4}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

$$P = 2\pi r \Rightarrow 2\pi r = 2\pi \Rightarrow r = 1$$

$$OH = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OAH} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow AH = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\widehat{AB}| = \frac{1}{6}(2\pi) = \frac{\pi}{3}$$

$$(\widehat{AH} + \widehat{BH} + \widehat{AB}) - (OA + AH + OH) = \frac{\pi}{3} - 1 = \frac{\pi - 3}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

$$\begin{aligned}\tan x + \cot x = -3 &\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -3 \\ \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = -3 &\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{-1}{3} \\ (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 + \left(2 \times \left(\frac{-1}{3}\right)\right) &= \frac{1}{3} \\ (\sin x + \cos x) = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \xrightarrow{\frac{3\pi}{4} < x < \pi} \sin x + \cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)} \\ = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times \frac{1}{3}} = -\frac{3}{4} \sqrt{3} = -0.75 \sqrt{3}\end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$\begin{aligned}\text{مساحت دایره} &= \pi r^2 = \pi \Rightarrow r = 1 \\ |OA| = |OB| = 1, |AH| &= \frac{1}{2} \\ \text{ارتفاع } AOD : |OH| &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ A\widehat{OD} = 60^\circ \Rightarrow A\widehat{OC} = 30^\circ \Rightarrow |\widehat{AC}| &= \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \\ |HC| = 1 - |OH| = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{محیط مثلث } AOH &= |OH| + |HA| + |OA| = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \\ \text{محیط قسمت رنگی} : |HC| + |AH| + |\widehat{AC}| &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \\ \text{محیطها را از هم کم می کنیم} : \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$\tan x + \cot x = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = \sqrt{2} \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{\div \sqrt{2}} \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \sin x < \cos x < 0 \Rightarrow \sin x - \cos x < 0$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x$$

$$= 1 - 2 \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x = -\sqrt{1 - 2 \sin x \cos x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cos x)$$

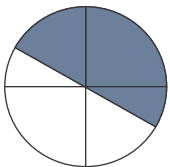
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^3 x - \cos^3 x} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

$$-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \frac{-\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6}$$

حداقل مقدار سینوس در این بازه $-\frac{1}{2}$ و حداکثر آن ۱ است.



$$-\frac{1}{2} < \frac{m-1}{2} \leq 1 \xrightarrow{\times 2} -1 < m-1 \leq 2 \Rightarrow -1 < m \leq 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

$$\begin{aligned}
& \tan(300^\circ) \cos(210^\circ) + \tan(280^\circ) \sin(170^\circ) \\
&= \tan(360^\circ - 60^\circ) \cos(180^\circ + 30^\circ) + \tan(360^\circ + 120^\circ) \sin(180^\circ + 120^\circ) \\
&= \tan(-60^\circ) \cos(180^\circ + 30^\circ) + \tan(180^\circ - 60^\circ) \sin(180^\circ - 60^\circ) \\
&= (-\tan(60^\circ))(-\cos(30^\circ)) + (-\tan(60^\circ)) \sin(60^\circ) \\
&= (-\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0
\end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

$\cos \alpha = \frac{2}{3}$ و α در ناحیه چهارم است:

$$\begin{aligned}
\sin \alpha &= -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{5}{4} \\
\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha - \pi)}{|\tan^2 \alpha - 1|} &= \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\frac{5}{4} - 1} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4(2 - \sqrt{5})}{3}
\end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$\begin{aligned}
& \tan(285^\circ) = \tan(270^\circ + 15^\circ) = -\cot(15^\circ) \\
& \tan(-165^\circ) = -\tan(165^\circ) = -\tan(180^\circ - 15^\circ) = \tan(15^\circ) \\
& \sin(1095^\circ) = \sin(1080^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ \\
& \cos(255^\circ) = \cos(270^\circ - 15^\circ) = -\sin(15^\circ) \\
& \tan(285^\circ) \tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ) \cos(255^\circ) = -\cot(15^\circ) \tan(15^\circ) + \sin^2(15^\circ) \\
&= -1 + \sin^2(15^\circ) = -\cos^2(15^\circ)
\end{aligned}$$

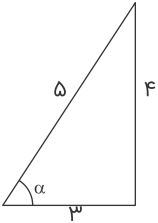
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

$$\sin\left(\frac{9\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{4} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = -\cot \alpha$$

اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ باشد، با رسم مثلث سایر نسبت‌های مثلثاتی α را پیدا می‌کنیم:



$$\tan \alpha = \frac{4}{3}, \cot \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha = -\frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{حاصل: } \cos \alpha (-\sin \alpha) - (-\cot \alpha) &= -\frac{3}{5} \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{4} \\ &= -\frac{12}{25} + \frac{3}{4} = \frac{-48 + 75}{100} = \frac{27}{100} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$\begin{aligned} \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) &= \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \right) \\ &= \frac{\tan x}{|\cos x|} \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} \times |\cos x| \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} \end{aligned}$$

اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد آنگاه $\cos x < 0$ است، پس $|\cos x| = -\cos x$ است. بنابراین:

$$\frac{\sin x}{\cos x} \times (-\cos x) \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\cos^2 x$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$\sin \frac{17\pi}{3} = \sin\left(\frac{14\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{14\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{15\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin \frac{11\pi}{6} = -\sin\left(\frac{10\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

$$A = \sqrt{1 + \tan^2 x} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x\right) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \left(2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sin^2 x\right)$$

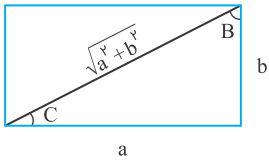
$$= \frac{1}{|\cos x|} \left(2 \times \frac{1}{2} - \sin^2 x\right) = \frac{1 - \sin^2 x}{|\cos x|} = \frac{\cos^2 x}{|\cos x|}$$

چون $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ است، یعنی x در ناحیه سوم قرار دارد و در نتیجه $|\cos x| = -\cos x$ است. پس:

$$A = \frac{\cos^2 x}{-\cos x} = -\cos x$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

با فرض $a > b$ ، شکل زیر را در نظر می‌گیریم.



$$\sqrt{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \sqrt{ab} = \frac{a^2 + b^2}{2\sqrt{ab}}$$

$$\sin B = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos B = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow \sin B \cos B = \frac{ab}{a^2 + b^2} \Rightarrow \sin B \cos B = \frac{ab}{2\sqrt{ab}}$$

$$\Rightarrow \sin B \cos B = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} \sin B \cos B = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin 2B = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 2B = 30^\circ \text{ یا } 150^\circ \Rightarrow 2B = 150^\circ \Rightarrow \hat{B} = 75^\circ \Rightarrow \hat{C} = 15^\circ$$

$$\tan(B - C) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{a}\right|} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - 3 \sin \frac{\pi}{a} x \Rightarrow -3f(2x) = -\frac{3}{2} + 9 \sin \frac{2\pi}{a} x$$

دوره تناوب تابع $-3f(2x)$ ، برابر است با:

$$T' = \frac{2\pi}{\left|\frac{2\pi}{a}\right|} = |a| = \frac{\pi}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{2}{a}\right|} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \pi|a| = \frac{\pi}{3} \Rightarrow |a| = \frac{1}{3}$$

$$y = \cos ax \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

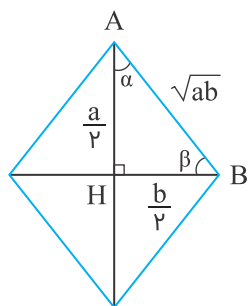
$$2 \cos^2 x - 1 = \sin x \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

جواب‌های مربوط به این دسته جواب‌ها، $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ می‌باشند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

قطرهای لوزی را به ترتیب a و b در نظر می‌گیریم.



$$\sin \alpha = \frac{b}{2\sqrt{ab}}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{2\sqrt{ab}} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{ab}{4ab}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2\alpha = 30^\circ \text{ یا } 150^\circ \Rightarrow \hat{A} = 150^\circ \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

$$\cos 2x = 3 \sin x - 1 \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x = 3 \sin x - 1$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \\ \sin x = -2 \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

اختلاف جواب‌های به‌دست‌آمده، برابر است با:

$$\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

$$T_{1+\sin ax} = \frac{V\pi}{f} - \frac{3\pi}{f} = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|a|} = \pi \Rightarrow |a| = 2$$

$$y = 3 \cos\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{a}\right|} = 2\pi|a| = 4\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

$$\sin 2x - 5 \sin^2 x \cos x = 0 \Rightarrow \sin 2x - 2 \sin x \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x(1 - 2 \sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

جواب‌هایی که در بازه $(-\pi, \pi)$ قرار دارند عبارتند از: $\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

راه حل اول:

$$x = 3 - 2y \Rightarrow 6 - 4y + ay = 6 \Rightarrow y(a - 4) = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 3 \\ a = 4 \times \end{cases} \Rightarrow A(3, 0)$$

$$\begin{cases} y = -x \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow B(-3, 3), \quad \begin{cases} y = -x \\ 2x + ay = 6 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{6}{2-a}, \frac{6}{a-2}\right)$$

$$\text{مرکز دایره: } O(\alpha, -\alpha) \Rightarrow |\overline{OA}| = |\overline{OB}|$$

$$\Rightarrow 2(\alpha + 3)^2 = (\alpha - 3)^2 + \alpha^2 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$r^2 = |OA|^2 = \left(-\frac{1}{2} - 3\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{25}{2}$$

$$\Rightarrow |OC|^2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{6}{2-a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{6}{a-2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \checkmark \\ a = 4 \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(2, -2)$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

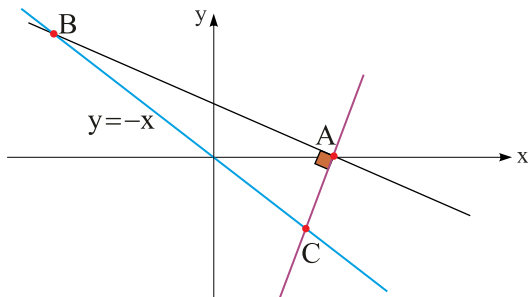
بنابراین مثلث ABC قائم الزاویه است و زاویه A قائمه می باشد.

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} - \hat{C} = 90^\circ - \hat{C} \Rightarrow \hat{B} - \hat{C} = 90^\circ - 2\hat{C}$$

$$\cot(B - C) = \cot(90^\circ - 2C) = \tan(2C)$$

$$= \frac{2 \tan C}{1 - \tan^2 C} = \frac{2(3)}{1 - (3)^2} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$$

راه حل دوم: چون مرکز روی خط $y = -x$ است و دو خط دیگر با این خط متقاطع هستند، پس A زاویه محاطی رو به قطر و در نتیجه ۹۰ درجه است. چون A قائمه است دو خط داده شده بر هم عمودند:



$$m = -\frac{1}{2}, m' = \frac{-2}{a}, mm' = -1 \Rightarrow \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = -1$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow A(3, 0)$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-3, 3)$$

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2, -2)$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}} = \frac{1}{3}, \quad \tan C = 3$$

$$\tan(B - C) = \frac{\tan B - \tan C}{1 + \tan B \tan C} = \frac{\frac{1}{3} - 3}{1 + \frac{1}{3} \times 3} = \frac{-\frac{8}{3}}{2} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \cot(B - C) = -\frac{3}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

گزینه ۱

۳۰

$$T = \frac{9\pi}{20} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{5}, \quad T = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 5 \Rightarrow b = \pm 5$$

اگر $b = 5$ باشد:

$$x = \frac{\pi}{4} : y = \arccos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + c \Rightarrow a + c = 1$$

$$x = \frac{7\pi}{20} : y = \arccos\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + c \Rightarrow 0 + c = -2 \Rightarrow c = -2$$

$$\xrightarrow{c=-2} a - 2 = 1 \Rightarrow a = 3$$

$$a.b = 3 \times 5 = 15$$

اگر $b = -5$ باشد:

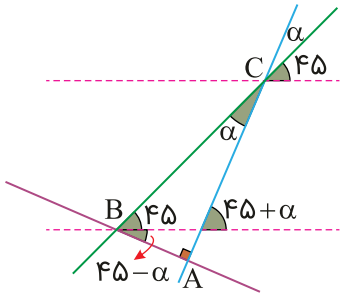
$$x = \frac{\pi}{4} : y = \arccos\left(-\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + c \Rightarrow c = 1$$

$$x = \frac{7\pi}{20} : y = \arccos\left(-\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + c \Rightarrow a + c = -2 \Rightarrow a = -3$$

$$a.b = 3 \times 5 = 15$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

چون مرکز دایره روی خط $y = x$ و در واقع روی BC قرار دارد و دایره از هر سه نقطه A و B و C باید بگذرد پس A هم روی محیط دایره و زاویه A ، زاویه محاطی رو به قطر است؛ در نتیجه $\widehat{A} = 90^\circ$.



اگر $\widehat{A} = 90^\circ$ پس دو خط $y = -\frac{1}{3}x - 3$ و $y = ax - 3$ بر هم عمودند؛ در نتیجه $a = 3$

$$\tan(45^\circ + \alpha) = 3 \Rightarrow \tan(90^\circ + 2\alpha) = \frac{2 \times 3}{1 + 3^2} = \frac{-3}{4}$$

$$\Rightarrow -\cot 2\alpha = \frac{-3}{4} \Rightarrow \cot 2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\widehat{B} - \widehat{C} = 90^\circ - \alpha - \alpha = 90^\circ - 2\alpha \Rightarrow \tan(\widehat{B} - \widehat{C}) = \cot 2\alpha = \frac{3}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$\sin\left(\frac{\pi + 4x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \cos 2x$$

$$\cos\left(\frac{\pi + 8x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) = -\sin 4x$$

$$\frac{1}{\cos 2x} - \frac{1}{\sin 4x} = 0 \Rightarrow \cos 2x = \sin 4x$$

$$\Rightarrow 2 \sin 2x \cos 2x = \cos 2x \xrightarrow{\cos 2x \neq 0} 2 \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{[0, \pi]} 2x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$$

$$\alpha = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan 2\alpha = \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$\begin{aligned}\sin^r\left(\frac{\pi}{r} - bx\right) &= \frac{1}{r}(1 - \cos(r(\frac{\pi}{r} - bx))) \\ &= \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \cos\left(\frac{\pi}{r} - r bx\right) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \sin(r bx)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{r} - \frac{a}{r} \sin(r bx) + c \quad (*)$$

$$\left. \begin{aligned}y_{\max} &= \frac{a}{r} + c + \left| -\frac{a}{r} \right| = 1 \\ y_{\min} &= \frac{a}{r} + c - \left| -\frac{a}{r} \right| = -r\end{aligned} \right\} \Rightarrow r \left| \frac{a}{r} \right| = r \Rightarrow a = \pm r$$

$$T = \frac{15\pi}{r} + \frac{5\pi}{r} = \frac{r\pi}{r} = 5\pi$$

$$T = \frac{r\pi}{|rb|} = 5\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{5} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{5}$$

$$ab = \pm \frac{r}{5} \xrightarrow{ab < 0} ab = -\frac{r}{5} = -5/6$$

نکته: با توجه به نمودار مشخص است که تابع در همسایگی $x = 0$ صعودی است، بنابراین در $(*)$ باید $-a$ و b هم علامت باشند، یعنی $0 < (-a)(b)$ ، پس $ab < 0$.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

$$\cot\left(\frac{\pi + rx}{r}\right) = \cos\left(\frac{\pi + \lambda x}{r}\right)$$

$$\cot\left(\frac{\pi + rx}{r}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{r} + rx\right) = -\tan rx$$

$$\cos\left(\frac{\pi + \lambda x}{r}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{r} + rx\right) = -\sin rx$$

$$\Rightarrow -\tan rx = -\sin rx \Rightarrow \frac{\sin rx}{\cos rx} = r \sin rx \cos rx$$

$$\Rightarrow \frac{\sin rx(1 - r \cos^2 rx)}{\cos rx} = 0 \Rightarrow \sin rx = 0, \cos^2 rx = \frac{1}{r}$$

$$\cos rx = \pm \frac{\sqrt{r}}{r} : \begin{cases} \cos rx = -\frac{\sqrt{r}}{r} \text{ در بازه مورد نظر نیست} \\ \cos rx = \frac{\sqrt{r}}{r} \Rightarrow rx = \pm \frac{\pi}{r} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{\lambda} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{\lambda} + \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{r}$$

$$\cos(r\alpha) = \cos\left(\frac{r\pi}{r}\right) = -\frac{1}{\sqrt{r}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲



$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x$$

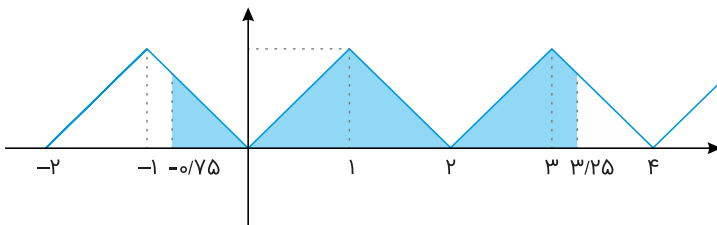
$$\Rightarrow 1 - \sin^2 x = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, \dots \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

کمترین فاصله بین جواب‌ها π واحد است.
نکته: ریشه‌های مخرج غیر قابل قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

نمودار تابع به صورت زیر خواهد بود:



$$S = 2 \times \frac{1 \times 2}{2} = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

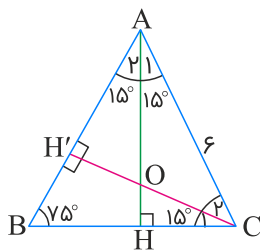
راه حل اول:

$$\triangle AHC : \cos \hat{C} = \frac{HC}{\epsilon} \Rightarrow HC = \epsilon \cos 75^\circ$$

$$\triangle OHC : \tan 15^\circ = \frac{OH}{HC} \Rightarrow OH = \epsilon \cos 75^\circ \tan 15^\circ$$

$$\begin{aligned} S_{OHC} &= \frac{1}{2} \times (\epsilon \cos 75^\circ)(\epsilon \cos 75^\circ \tan 15^\circ) = 18 \cos^2 75^\circ (2 - \sqrt{3}) \\ &= 18 \times \frac{1 + \cos 150^\circ}{2} (2 - \sqrt{3}) = 9 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) (2 - \sqrt{3}) \\ &= \frac{9}{2} (2 - \sqrt{3})^2 = \frac{9}{2} (7 - 4\sqrt{3}) = \frac{9}{2(7 + 4\sqrt{3})} \end{aligned}$$

راه حل دوم:

چون مثلث ABC متساوی الساقین است، پس $AB = AC$ و داریم:

$$\hat{C} = \hat{B} = 75^\circ \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 15^\circ$$

$$\triangle BH'C : \hat{B} = 75^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = 15^\circ \Rightarrow \triangle OHC \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{S_{OHC}}{S_{AHC}} = \left(\frac{HC}{AH}\right)^2 = \tan^2 15^\circ$$

$$= (2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3} \Rightarrow S_{OHC} = (7 - 4\sqrt{3}) S_{AHC} (*)$$

$$S_{AHC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{AB}{\epsilon} \right) \left(\frac{AC}{\epsilon} \right) \left(\frac{\sin \hat{A}}{\frac{1}{2}} \right) \right) = \frac{9}{2}$$

$$(*) \Rightarrow S_{OHC} = (7 - 4\sqrt{3}) \times \frac{9}{2} = \frac{9(7 - 4\sqrt{3})}{2}$$

تذکر: برای یافتن مقدار تانژانت می‌توان به دو صورت زیر عمل کرد:

$$1) \tan 15^\circ = \tan (60^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$2) \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \quad (\cos 2x = 2\cos^2 x - 1)$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \quad (\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x)$$

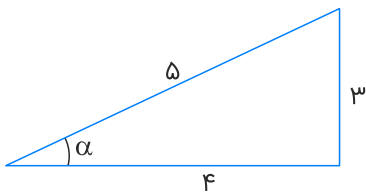
$$\Rightarrow \tan 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

حال این معادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} + x \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \quad (x \neq k\pi \text{ زیرا غیرقابل قبول}) \end{cases}$$



$$\tan \alpha = \frac{3}{4}, \quad \cot \alpha = \frac{4}{3}, \quad \sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot 2\alpha} &= \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha} \\ &= \frac{2 \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5}}{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{4}{5} \left(\frac{6}{5} + 1\right)}{\frac{16-9}{12}} = \frac{\frac{4}{5} \left(\frac{11}{5}\right)}{\frac{7}{12}} = \frac{4(11)(24)}{5(5)(7)} = \frac{1056}{175} \end{aligned}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{2}$$

$$y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{\nu} + x\right) = a + b \cos x$$

باتوجه به نمودار ماکزیمم تابع برابر ۳ است، پس:

$$\text{ماکزیمم} = a + |b| = 3 \xrightarrow[b < 0]{\text{باتوجه به نمودار}} a - b = 3 \quad (1)$$

$$\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right) : 0 = a + b \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = a + b\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow a + \frac{b}{3} = 0 \Rightarrow 3a + b = 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} a - b = 3 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow b = -3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

$$\begin{cases} y_{\max} = |a| + c = \frac{5}{2} \\ y_{\min} = -|a| + c = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow |a| = \frac{3}{2}, \quad c = 1$$

$$\Rightarrow y = 1 + a \cos bx ; \quad y(0) = 1 + a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

پس تابع به صورت $y = 1 - \frac{3}{2} \cos bx$ می‌باشد و حاصل ac برابر است با:

$$ac = \frac{-3}{2} \times 1 = \frac{-3}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

$$\sin x + \cos x = \frac{6\sqrt{5}}{10} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow 1 + \sin 2x = \frac{9}{5} \Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\Rightarrow 4 + 4 \tan^2 x = 5 \tan x \Rightarrow 4(1 + \tan^2 x) = 5 \tan x$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{5}{4} \tan x \xrightarrow{\times 4} 4 \tan^2 x - 5 \tan x + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta=9} \begin{cases} \tan x = 2 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

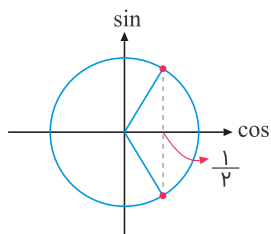
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{3} - x\right)\right) = 1$$

$$\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

$$\lambda \cos x - \tan^2 x = 1 \Rightarrow \lambda \cos x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \cos^3 x = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}$$



$x \in [0, 2\pi] \Rightarrow$ دو جواب دارد

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < -x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0 \Rightarrow \frac{1-m}{2+m} > 0$$

m	-۲		۱	
۱-m	+		+	○ -
۲+m	-	○	+	+
$\frac{1-m}{2+m}$	-	○	+	○ -

$$\Rightarrow -2 < m < 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

$$\begin{cases} \max = |a| + c = 5 \\ \min = -|a| + c = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

طرفین تابع را در $\sin^2 x$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) \sin^2 x &= 32 \sin^2 x \cos^2 x \cos^2(2x) \cos^2(4x) \cos^2(8x) \cos^2(16x) \\ &= 8 \sin^2(2x) \cos^2(2x) \cos^2(4x) \cos^2(8x) \cos^2(16x) \\ &= 2 \sin^2(4x) \cos^2(4x) \cos^2(8x) \cos^2(16x) \\ &= \frac{1}{32} \sin^2(32x) \Rightarrow f(x) = \frac{\sin^2(32x)}{32 \sin^2 x} \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin^2 \frac{32\pi}{12}}{32 \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{32 \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{32 \times \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{16\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{8(2 - \sqrt{3})} = \frac{3}{32(2 - \sqrt{3})} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{32} = \frac{6 + \sqrt{27}}{32}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰



دوره تناوب را باتوجه به نمودار به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \\ T = \frac{2\pi}{|b|} \end{cases} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3$$

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases} \max : |a| + c = 1 \\ \min : -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -3, c = -1 \\ b = 3, c = -1 \end{cases}$$

فقط حالت $b = 3, c = -1$ را در گزینه‌ها داریم، پس گزینه ۱ صحیح است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

$$4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \Rightarrow 4 \sin x (-\cos x) = 1$$

$$\Rightarrow -4 \times \frac{1}{2} \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{12} & (1) \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{12} & (2) \end{cases}$$

تعداد جواب‌ها را در دسته‌های مختلف به دست می‌آوریم:

k	۱	۲
x	$\pi - \frac{\pi}{12}$	$2\pi - \frac{\pi}{12}$

(۱)

k	۰	۱
x	$\frac{7\pi}{12}$	$\pi + \frac{7\pi}{12}$

(۲)

مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\pi - \frac{\pi}{12} + 2\pi - \frac{\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} + \pi + \frac{7\pi}{12} = 4\pi + \pi = 5\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

$$\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\cos x \Rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cos x \neq 0} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$2 \cos(3x) = -2 - 5 \sin^2 x$$

اگر برد دو طرف تساوی را حساب کنیم خواهیم داشت:

$$-2 \leq 2 \cos(3x) \leq 2, \quad -7 \leq -2 - 5 \sin^2 x \leq -2$$

پس دو طرف تساوی فقط به ازای -2 برقرار خواهد بود.

$$\begin{cases} 2 \cos(3x) = -2 \Rightarrow \cos(3x) = -1 \Rightarrow 3x = (2k-1)\pi \Rightarrow x = (2k-1)\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ -2 - 5 \sin^2 x = -2 \Rightarrow \sin^2 x = 0 \Rightarrow x = k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

جوابهای مشترک دو معادله را پیدا می‌کنیم:

$$\{-\pi, \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi\} \cap \{-\pi, 0, \pi\} = \{-\pi, \pi\}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$(1 - \cos^2 x) + \sin^2 x \cos 3x = 0 \Rightarrow \sin^2 x (1 + \cos 3x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos 3x = -1 \Rightarrow 3x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

جوابهای بازه $[0, 2\pi]$ برابر $\{0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$ است که تعداد آنها ۵ تا است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

راه حل اول:

$$۲ \sin(۳x) \cos(۳x) = ۱ \Rightarrow ۲ \sin(۳x) \cos(۳x) = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin(۶x) = \frac{۱}{۲} = \sin\left(\frac{\pi}{۶}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۶x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳۶} \Rightarrow \begin{cases} k = ۰ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۳۶} \\ k = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱۳\pi}{۳۶} \end{cases} \\ ۶x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{۵\pi}{۳۶} \Rightarrow \begin{cases} k = ۰ \Rightarrow x = \frac{۵\pi}{۳۶} \\ k = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱۷\pi}{۳۶} \end{cases} \end{cases}$$

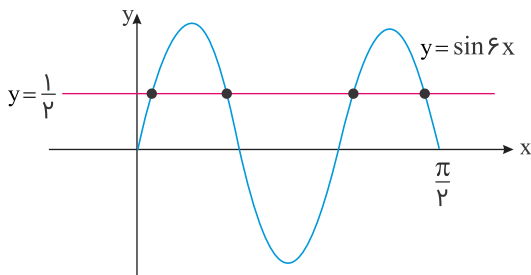
بنابراین معادله چهار جواب دارد.

راه حل دوم:

$$۲ \sin(۳x) \cos(۳x) = ۱ \Rightarrow \sin(۶x) = \frac{۱}{۲}$$

$$۰ \leq x \leq \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۰ \leq ۶x \leq ۳\pi$$

باتوجه به شکل معادله چهار جواب دارد:



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

طرفین رابطه را در $\sin^3 x$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) \sin^3 x &= 16 \sin^3 x \cos^3 x \cos^3 x \cos^3 x \cos^3 x \cos^3 x \\ \Rightarrow f(x) \sin^3 x &= 16 \sin^3 x \cos^3 x \cos^3 x \cos^3 x \cos^3 x \cos^3 x \\ &= \sin^3 x \cos^3 x \cos^3 x \cos^3 x \cos^3 x \cos^3 x \\ &= \frac{1}{16} \sin^3 x \cos^3 x \cos^3 x \cos^3 x \cos^3 x \cos^3 x \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{\sin^3 x \cos^3 x \cos^3 x \cos^3 x \cos^3 x \cos^3 x}{16 \sin^3 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{36}\right) &= \frac{\sin^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36}}{16 \sin^3 \frac{\pi}{36}} = \frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{36}\right) \cos^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36}}{16 \sin^3 \frac{\pi}{36}} \\ &= \frac{\cos^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36}}{16 \sin^3 \frac{\pi}{36}} = \frac{\cos^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36} \cos^3 \frac{\pi}{36}}{16 \sin^3 \frac{\pi}{36}} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

$$a + |b| = \frac{3}{2} \xrightarrow[b < 0]{\text{باتوجه به نمودار}} a - b = \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) : f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow a + \frac{1}{2}b = 0$$

$$\Rightarrow 2a + b = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = \frac{3}{2} \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow 3a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

دوره تناوب را باتوجه به نمودار به دست می‌آوریم:

$$T = \frac{9\pi}{\gamma} - \left(-\frac{3\pi}{\gamma}\right) = \frac{12\pi}{\gamma} = 6\pi$$

$$\Rightarrow T = 6\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases} \max : |a| + c = 1 \\ \min : -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

طبق نمودار، تابع در حوالی $x = 0$ نزولی است، بنابراین $ab < 0$ پس داریم:

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = -6$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

باتوجه به نمودار $f(\pi) = -\frac{3}{\gamma}$ است، پس:

$$-\frac{3}{\gamma} = a + b \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow a + b\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{\gamma}$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2a - b\sqrt{3} = -3 \quad (1)$$

باتوجه به نمودار تابع $b > 0$ است و همچنین چون ماکزیمم تابع $\sqrt{3}$ است، پس:

$$a + |b| = \sqrt{3} \xrightarrow{b>0} a + b = \sqrt{3} \quad (2)$$

با حل دستگاه داریم:

$$-2 \begin{cases} a + b = \sqrt{3} \\ 2a - b\sqrt{3} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 2b = -2\sqrt{3} \\ 2a - b\sqrt{3} = -3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} -b(2 + \sqrt{3}) = -(3 + 2\sqrt{3}) \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

$$y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{\epsilon} - x\right) = a + b \sin x$$

مقدار تابع در $-\frac{5\pi}{\epsilon}$ صفر است. پس:

$$y\left(-\frac{5\pi}{\epsilon}\right) = a + b \sin\left(-\frac{5\pi}{\epsilon}\right) = a + b\left(-\frac{1}{\epsilon}\right) = 0 \Rightarrow b = \epsilon a$$

بنابراین: $y = a + \epsilon a \sin x$. به علاوه با توجه به اینکه $y(0) > 0$ می باشد، پس $a > 0$ است و ماکزیمم تابع زمانی رخ می دهد که $\sin x = 1$ باشد.

$$\max = 3 \Rightarrow a + \epsilon a = 3 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow y = 1 + \epsilon \sin x$$

$$y\left(\frac{\pi}{\epsilon}\right) = 1 + \epsilon\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸