



واسه دریافت سگفتانه بزن رولوگو 😊

منبع:

گزینه ۲

۱

$$f(x) = a[x] + a + b[x] + b[a + 1]$$

$$f(x) = (a + b)[x] + a + b + b[a]$$

اگر $f(x)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، $a + b = 0$ ؛ یعنی $a = -b$ است. در این صورت:

$$f(x) = -a[a]$$

$$\frac{a[a]}{f(a)} = \frac{a[a]}{-a[a]} = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

گزینه ۲

۲

$$f(x) = a[x] + b[x] + b = (a + b)[x] + b$$

برای آنکه $f(x)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید $a + b = 0$ ؛ یعنی $a = -b$ باشد. در این صورت $f(x) = b$ خواهد شد. بنابراین:

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{b}{-b} = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

گزینه ۲

۳

برای $x > 0$ ، معادله $f(x)$ به صورت $f(x) = -\frac{\pi}{\pi}x$ ، و برای $x < 0$ ، به صورت $f(x) = \frac{\pi}{\pi}x$ می‌باشد. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{\pi})^-} \frac{\sin x}{\left| -\frac{\pi}{\pi}x \right|} + \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{\pi})^+} \frac{\left| \frac{\pi}{\pi}x \right|}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\pi}{\pi}} + \frac{1}{-1} = \frac{\pi}{\pi} - 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

تابع $[x^2 - ax]$ روی $\mathbb{R}$ ناپیوسته است، برای آنکه تابع $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد باید $b = 0$ شود. در این صورت $f(x) = -2a$ خواهد بود.

$$\frac{a}{f(b)} = \frac{a}{f(0)} = \frac{a}{-2a} = -\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

$$(f + g) + (f - g) = 2f \Rightarrow f = \frac{1}{2}((f + g) + (f - g))$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} (f + g) + \lim_{x \rightarrow 1^+} (f - g)}{2} = \frac{0 + 5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} (f + g) + \lim_{x \rightarrow 1^-} (f - g)}{2} = \frac{2 + 3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{5}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

چون در پیوستگی، باید مقدار حد چپ و راست با هم برابر باشد پس زیر رادیکال باید ریشه مضاعف باشیم:

$$\sqrt{3x^2 + (m-1)x + (m-4)} = \sqrt{(x+1)(3x+m-4)} \Rightarrow m-4=3 \Rightarrow m=7$$

$$m=7: |x^3 + ((m-7)x + a)^2| = |x^3 + a^2|$$

$x=a$ ریشه صورت و مخرج است، پس: $a=-1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3(x+1)^2}}{|x^3+1|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x+1|(x^2-x+1)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x=-1: f(-1) = \frac{2 \sin b}{3\sqrt{-1+2}} = \frac{2 \sin b}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin b = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

a باید ریشه مضاعف زیر رادیکال باشد تا پیوستگی برقرار شود. از طرفی ریشه مخرج هم باشد.

$$\Delta = (m + 3)^2 - 4(6)\left(\frac{m}{2}\right) = m^2 + 6m + 9 - 12m = m^2 - 6m + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 3)^2 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$x = a = \frac{-(m + 3)}{2 \times 6} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{6(x + \frac{1}{2})^2}}{|2x^3 + \frac{1}{6}|} &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{6}|x + \frac{1}{2}|}}{2|x^3 + \frac{1}{6}|} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{6}|x + \frac{1}{2}|}}{2|x + \frac{1}{2}||x^2 + \frac{1}{6} - \frac{x}{2}|}} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \tan b}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \sqrt{2} \tan b = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \tan b = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow b = \frac{\pi}{6}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

تابع در $x = 1$ پیوستگی راست دارد:

$$f(1) = \tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 + x - 2|}{a(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|(x-1)(x+2)|}{a(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{-a(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{-a} = \frac{-3}{a} \\ \frac{-3}{a} &= -1 \Rightarrow a = 3 \end{aligned}$$

در $x = 5$ پیوستگی چپ دارد:

$$f(5) = b(5 - [-5]) = 10b$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x^2 + x - 2|}{a(1-x)} = \frac{28}{-4a} = \frac{-7}{a}$$

$$f(5) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \Rightarrow \frac{-7}{a} = 10b \Rightarrow ab = \frac{-7}{10} = -0.7$$

توجه: در حل سؤال بالا نیازی به محاسبه مقدار a نبود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

تابع f فقط در $x = 1$ ناپیوسته است:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1$$

$$5x^2 - ax + b = 0 \xrightarrow{x=1} 5 - a + b = 0 \Rightarrow -a + b = -5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ -a + b = -5 \end{cases} \xrightarrow{+} 2b = -6 \Rightarrow b = -3, a = 2$$

$$\left[\frac{b-2a}{3} \right] = \left[\frac{-3-4}{3} \right] = \left[\frac{-7}{3} \right] = -3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$x \rightarrow -1^+ \Rightarrow [x] = -1, [-x] = 0, x + 1 > 0 \Rightarrow |x + 1| = x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x + 1| + [x]}{x - [-x]} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x + 1 + (-1)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x} = 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

تابع در $x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ پیوسته است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{2}}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{2}}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2} \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2} \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{2}}} \frac{(\sqrt{2} \sin x + 1)(\sin x - 1)}{(1 - \sin^2 x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{2}}} \frac{(\sqrt{2} \sin x + 1)(\sin x - 1)}{-(\sin x - 1)(\sin x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{2}}} \left(-\frac{\sqrt{2} \sin x + 1}{\sin x + 1}\right) = -\frac{3}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

راه حل اول:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - [x^3]} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - \lambda} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - \lambda} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

راه حل دوم: (هوپیتال)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - \lambda} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{3x^2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^3 = \left(\sqrt{\frac{1}{9}} \right)^3 = \frac{1}{27}$$



$$\text{حد راست : } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{2|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{2(x - 2)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{-2(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{-2} = -2$$

$$f(2) = 2$$

$$\Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

پس تابع فقط از راست پیوسته است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$\text{مقدار تابع : } f(-2) = a$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\lambda + x^3}{|x + 2|} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{-(x + 2)} \\ &= - \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (x^2 - 2x + 4) = -(4 + 4 + 4) = -12 \end{aligned}$$

برای پیوستگی چپ، باید $a = -12$ باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} [2 \sin x - 1] = [2(\frac{1}{2})^-] - 1 = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

معادله سهمی و خط را می‌نویسیم:

$$f(x) = a(x - 0)(x - 4) = ax(x - 4)$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow -4a = 1 \Rightarrow a = \frac{-1}{4}$$

$$g(x) = \frac{-x}{4} + 1 = \frac{-1}{4}(x - 4)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) + g(x)}{4 - x} &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}x(x - 4) - \frac{1}{4}(x - 4)}{4 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}(x - 4)(x + 1)}{-(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{4}(x + 1) = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{a + 3[-x]}{1 - 2x} = -\infty \Rightarrow \frac{a - 3}{0^-} = -\infty \Rightarrow a - 3 > 0 \Rightarrow a > 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{x}{a} - x \right] = \left[\frac{1}{2a} - \frac{1}{2} \right]$$

$$a > 3 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{3} \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 0 < \frac{1}{2a} < \frac{1}{6}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}} -\frac{1}{2} < \frac{1}{2a} - \frac{1}{2} < -\frac{1}{3} \Rightarrow \left[\frac{1}{2a} - \frac{1}{2} \right] = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

در همسایگی راست $x = 0$ ، ضابطه تابع $f(x) = -4x$ و در همسایگی چپ $x = 0$ ، ضابطه تابع $f(x) = \frac{2}{3}x$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{|x|} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{\frac{2}{3}x}$$

$$= -4 - \frac{3}{2} = -\frac{11}{2} = -5.5$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{f(x)}{\cos x} = +\infty \Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x)}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) < 0$$

اکنون گزینه‌ها را با شرط به‌دست‌آمده مقایسه می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم که گزینه "۳"، با شرط به‌دست‌آمده مطابقت دارد.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \left(\left\lfloor \frac{3x}{\pi} \right\rfloor - 2 \right) = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1 - 2 = -1$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه "۱":

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \left(2 \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor + 1 \right) = 2 \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor + 1 = 0 + 1 = 1$$

گزینه "۲":

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \left(\left\lfloor \frac{2x}{\pi} \right\rfloor - 1 \right) = \left\lfloor 1^+ \right\rfloor - 1 = 1 - 1 = 0$$

گزینه "۴":

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \left(3 \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor + 2 \right) = 3 \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor + 2 = 0 + 2 = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

اگر $x \rightarrow \pi^-$ ، در این صورت $\sin x \rightarrow 0^+$ خواهد بود. بنابراین $f(x)$ در همسایگی چپ π ، باید عددی منفی باشد. مشاهده می‌شود که ضابطهٔ گزینهٔ "۴"، این خصوصیت را دارد.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\left\lfloor \frac{3x}{\pi} \right\rfloor - 3 \right) = [3^-] - 3 = 2 - 3 = -1$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ "۱":

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\left\lfloor \frac{2x}{\pi} \right\rfloor - 1 \right) = [2^-] - 1 = 1 - 1 = 0$$

گزینهٔ "۲":

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(3 \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor + 1 \right) = 3[1^-] + 1 = 0 + 1 = 1$$

گزینهٔ "۳":

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(2 \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor + 3 \right) = 2[1^-] + 3 = 0 + 3 = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-3x}{\frac{3}{4}x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|-3x|}{\frac{3}{4}x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{\frac{3}{4}x} = -4 \end{aligned}$$

دقت کنید وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، $-3x \rightarrow \infty$ پس $-3x = |-3x|$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

با جاگذاری $x = \lambda$ در صورت کسر به صفر می‌رسیم ولی پاسخ حد باید مقداری غیرصفر باشد، پس باید مخرج هم صفر شود که رفع ابهام کسر صفر صفرم داشته باشیم:

$$\lambda a - b = 0 \Rightarrow \lambda a = b$$

$$\lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{b(\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{x}} - 2)}{b(\frac{x}{\lambda} - 1)} \times \frac{\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{x}} + 2}{\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{x}} + 2} = \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{\sqrt[3]{x} + 2 - 4}{\frac{x}{2} - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\frac{x}{2} - 4} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{x - \lambda}{6x - 4\lambda} = \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{x - \lambda}{6(x - \lambda)} = \frac{1}{6}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$(3a, 0), (0, 2a) \in f \Rightarrow \text{شیب خط} = m = -\frac{2}{3} \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x + 2a$$

$$(-m, 0), (0, 2m) \in g \Rightarrow \text{شیب خط} = m' = 2 \Rightarrow g(x) = 2x + 2m$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{|f(x)|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + m}{|-\frac{2}{3}x + 2a|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-\frac{2}{3}x} = -3$$

$$x \rightarrow -\infty : -\frac{1}{3}x \rightarrow +\infty \Rightarrow |-\frac{1}{3}x + a| = -\frac{1}{3}x + a$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

صورت کسر به ازای $x = 1$ صفر می‌شود، پس باید مخرج هم به ازای $x = 1$ صفر شود تا حالت $\frac{0}{0}$ و رفع ابهام داشته باشیم.

$$a + b = 0 \Rightarrow a = -b$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-a\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}+a}{ax-a} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}+1}{x-1} = \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}+1}{x-1} \times \frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}+1}{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}+1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-2+\sqrt[3]{x}}{(x-1)(1+\sqrt{2-\sqrt[3]{x}})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{2(x-1)} \times \frac{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{2(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2(x-1) \times 3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

از قاعده هوییتال هم می‌توان برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ استفاده کرد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}+1}{x-1} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{-1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{1} = \frac{1}{6}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} = \frac{0}{0}$$

راه حل اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - (3x+2)}{(5x^2 - 18x + 16)(4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-2)}{12(x-2)(5x-8)} = \frac{-1}{8} \end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned} \text{HOP : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{0 - \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}}{10x - 18} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(10x - 18) \sqrt{3x+2}} \\ &= \frac{-1}{2(4)} = \frac{-1}{8} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$x = \frac{\pi}{3}$ ریشه مخرج است.

$$\frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{3} \Rightarrow f(x) = \frac{x\sqrt{3} + b}{\sqrt{3} \cos x - \sin x}$$

چون x از راست به $\frac{\pi}{3}$ نزدیک می‌شود آن‌گاه $\sqrt{3} \cos x < \sin x$ است پس مخرج از چپ به صفر نزدیک می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{x\sqrt{3} + b}{\sqrt{3} \cos x - \sin x} = \frac{\frac{\sqrt{3}\pi}{3} + b}{0^-} = -\infty \Rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{3}} + b > 0$$

$$\Rightarrow b > \frac{-\pi}{\sqrt{3}} \simeq -1/11 \xrightarrow{b \in \mathbb{Z}} \min(b) = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده}$$

تابع در همسایگی چپ صفر حد ندارد، بنابراین گزینه ۴ درست است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

چند جمله‌ای $p(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر است، بنابراین $p(x)$ به ازای ریشه‌های $x^2 - 1$ برابر صفر است.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, -1$$

بنابراین داریم:

$$p(1) = 0, p(-1) = 0 \quad (*)$$

اکنون باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x^2 - 1$ را می‌خواهیم؛ یعنی باید $Q(2)$ را محاسبه کنیم.

$$Q(x) = p(x - 1) + p(1 - x)$$

$$\xrightarrow{x=2} Q(2) = p(2 - 1) + p(1 - 2) = p(1) + p(-1)$$

$$\xrightarrow{(*)} Q(2) = 0 + 0 = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^n - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2} = 2$$

چون حاصل حد یک عدد شده است، پس باید درجه صورت و مخرج کسر یکی باشد. بنابراین $n = 3$ است. همچنین طبق قاعده پرتوان داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{ax^3} = \frac{4}{a} = 2 \Rightarrow a = 2$$

حال $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \frac{0}{0}$$

حد را رفع ابهام می‌کنیم.
روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) (4x^2 - 4x - 2)}{\left(x - \frac{1}{2}\right) (2x^2 + 8x + 4)} = \frac{-3}{\frac{17}{2}} = -\frac{6}{17}$$

$$\begin{array}{l} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{-4x^3 + 2x^2} \left| \frac{x - \frac{1}{2}}{4x^2 - 4x - 2} \right. \\ \hline -4x^2 + 1 \\ \hline 4x^2 - 2x \\ \hline -2x + 1 \\ \hline 2x - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{-2x^3 + x^2} \left| \frac{x - \frac{1}{2}}{2x^2 + 8x + 4} \right. \\ \hline 8x^2 - 2 \\ \hline -8x^2 + 4x \\ \hline 4x - 2 \\ \hline -4x + 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

روش دوم: هوییتال

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12x^2 - 12x}{6x^2 + 14x} = \frac{3 - 6}{\frac{17}{2}} = \frac{-6}{17}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^p} - \frac{1}{x^p+1}} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{x+x+1}{x(x+1)}} - \sqrt{\frac{x^p+1-x^p}{x^p(x^p+1)}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{2x+1}{x^p+x}} - \sqrt{\frac{1}{x^p+x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} - \sqrt{\frac{1}{x^p+x}} \right) = \sqrt{2} - 0 = \sqrt{2} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f - [x])g(x) = 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} 3g(x) = 6$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{ax^p + bx + c}}{|x - 1|} = 2$$

جواب حد یک عدد است و مخرج به ازای $x = 1$ صفر است، بنابراین باید صورت کسر نیز به ازای آن صفر باشد، حال داریم:

$$ax^p + bx + c = a(x - 1)^p$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{ax^p + bx + c}}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{a(x - 1)^p}}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{a}|x - 1|}{|x - 1|} = 2$$

$$\Rightarrow a = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4}|x - 1|}{|x - 1|} = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x + 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^p + x + 1}}{x + 2} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{a}|x|}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{a}x}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left[\frac{1}{x} \right] \times \sqrt{\frac{1}{4}x^p + x + 1} = -1 \times \sqrt{\frac{1}{4}(-1)^p + (-1) + 1} = -1 \times \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |2x|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2x}{x} = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x] + 3}{x + 2} = \frac{\overbrace{[(-2)^-]}^{-3} + 3}{(-2)^- + 2} = \frac{0}{0^-} = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6 - x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2| + |x| - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x - 4$ برابر ۳ است، پس $p(4) = 3$.

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x + 2$ برابر ۱ است، پس $p(-2) = 1$.

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x - 2$ را می‌خواهیم، بنابراین $x = 2$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$p(x^2) + 4p(-x) = p(2^2) + 4p(-2)$$

$$= p(4) + 4p(-2) = 3 + 4 \times 1 = 7$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - \sqrt[n]{x^n - 1}}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{x^n} = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow n = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{x} = \frac{a}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[n]{x^n - 1}}{x^n - 1} = \frac{0}{0}$$

حال حد را رفع ابهام می‌کنیم:

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[n]{x^n - 1}}{x^n - 1} \times \frac{\frac{1}{9}x^n + \frac{2}{3}x\sqrt[n]{x^n - 1} + (\sqrt[n]{x^n - 1})^2}{\frac{1}{9}x^n + \frac{2}{3}x\sqrt[n]{x^n - 1} + (\sqrt[n]{x^n - 1})^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{27}x^3 - x^n + 1}{(x^n - 1)(\frac{1}{9}x^n + \frac{2}{3}x\sqrt[n]{x^n - 1} + (\sqrt[n]{x^n - 1})^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x - \frac{1}{2}) \left(\frac{1}{27}x^2 - \frac{x}{9} - \frac{1}{3} \right)}{(x - \frac{1}{2}) \left(\frac{1}{9}x^n + \frac{2}{3}x\sqrt[n]{x^n - 1} + (\sqrt[n]{x^n - 1})^2 \right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3}}{1 \times (1 + 2 \times 1 + 1)} = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{\frac{1}{27}x^3 - x^n + 1}{\frac{1}{27}x^3 - \frac{x}{9} - \frac{1}{3}} \bigg| \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{27}x^2 - \frac{x}{9} - \frac{1}{3}}$$

$$\frac{-\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{9}x^2}{-\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{9}x^2}$$

$$-\frac{1}{9}x^2 + 1$$

$$+\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x$$

$$-\frac{1}{3}x + 1$$

$$+\frac{1}{3}x - 1$$

۰

روش دوم: (هوپیتال)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^3 - 1}}{4x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(2x)(x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}}}{4}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{4}}{4} = \frac{\frac{4 - 3}{4}}{4} = \frac{1}{16}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

گزینه ۳

۳۹

راه حل اول:

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^3 + 10x + 16}{6(2 + \sqrt[3]{x})} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^3 + 10x + 16}{6(2 + \sqrt[3]{x})} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x + 8)(x + 2)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{6(2 + \sqrt[3]{x})(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x + 8)(x + 2)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{6(x + 8)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x + 2)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{6} = \frac{-6 \times 12}{6} = -12$$

راه حل دوم: (فراتر از کتاب)

با استفاده از قاعده هوییتال داریم:

$$\text{HOP : } \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 10}{6 \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{-16 + 10}{6 \times \frac{1}{3 \times 4}} = -6 \times 2 = -12$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

می‌دانیم $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ و $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ و $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ حال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^-} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^+} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^\pm} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^\pm} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^\pm} = \pm\infty$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

راه حل اول: استفاده از هم‌ارزی:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 2 \left| x + \frac{1}{4} \right| \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x - 2 \left(x + \frac{1}{4} \right) \right) = -\frac{1}{2}$$

راه حل دوم: با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + x}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x + \sqrt{4x^2 + x})(2x - \sqrt{4x^2 + x})}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - (4x^2 + x)}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x - |2x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{4x} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸